

9.2.7 Nezávislé jevy I

Předpoklady: 9204

Př. 1: Předpokládej, že pravděpodobnost narození chlapce je stejná jako pravděpodobnost narození dívky (a tedy v obou případech rovna 0,5) a není ovlivněna genetickými dispozicemi rodičů. Najdi množinu všech možných výsledků rození dětí v rodinách se třemi dětmi. Urči pravděpodobnosti následujících jevů:

- a) Jev A : „nejstarší dítě je hoch“ b) Jev B : „prostřední dítě je dívka“
c) Jev C : „všechny tři děti jsou hoši“

Urči také pravděpodobnosti jevů $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ a $(B \cap C)$. U každého průniku rozhodni, zda je v běžném smyslu možné považovat jevy, ze kterých je sestaven, za nezávislé.

Při sestavování množiny všech výsledků musíme zohlednit:

- potřebujeme znát pořadí dětí, kvůli určení pravděpodobností jevů A a B
- všechny výsledky by měly být stejně pravděpodobné (což neplatí pro výsledky „dvě dívky a jeden hoch“ a „tři hoši“)

\Rightarrow množinou všech výsledků budou uspořádané trojice z písmen h, d , kde první místo znamená pohlaví prvního dítěte, druhé místo pohlaví druhého, třetí místo třetího.

$$\Omega = \{(h, h, h), (h, h, d), (h, d, h), (d, h, h), (h, d, d), (d, h, d), (d, d, h), (d, d, d)\}$$

a) Jev A : „nejstarší dítě je hoch“

$$A = \{(h, h, h), (h, h, d), (h, d, h), (h, d, d)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b) Jev B : „prostřední dítě je dívka“

$$B = \{(h, d, h), (h, d, d), (d, d, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Jev C : „všechny tři děti jsou hoši“

$$C = \{(h, h, h)\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{8}$$

nezávislé jevy: jevy, které se neovlivňují

Jev $(A \cap B)$: „první dítě je hoch a prostřední je dívka“

$$A \cap B = \{(h, d, h), (h, d, d)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

jevy A, B jsou nezávislé, fakt, že se jako první narodí chlapec nemá vliv na pohlaví druhého dítěte

Jev $(A \cap C)$: „první dítě je hoch a všechny tři děti jsou hoši“

$$A \cap C = \{(h, h, h)\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

jevy A, C nejsou nezávislé, protože se nemohou narodit tři hoši bez toho, aby první dítě byl hoch

Jev $(B \cap C)$: „prostřední dítě je dívka a všechny tři děti jsou hoši“

$$A \cap C = \emptyset \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{0}{8} = 0$$

jevy B, C nejsou nezávislé, protože když bude prostřední dítě dívka, nikdy se nenarodí ze tří dětí tři hoši

Pravděpodobnost, že „první dítě je hoch a druhé dítě je dívka“ můžeme určit i jinak. Přibližně polovina rodin má jako první dítě hoch a z této poloviny pak polovina rodin má jako druhé

dítě dívku \Rightarrow pravděpodobnost jevu $(A \cap B)$ je tedy: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Všimneme si význam jednotlivých členů: $\frac{1}{2} = P(A)$, $\frac{1}{2} = P(B)$, $\frac{1}{4} = P(A \cap B)$.

Zdá se, že platí vzorec: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Platí tento vzorec i pro jevy A, C ? $P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

Podobně vzorec neplatí pro jevy B, C : $P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

Závěr: Zdá se, že pokud jsou dva jevy A, B nezávislé, pravděpodobnost $P(A \cap B)$ toho, že nastanou oba získáme jako součin pravděpodobností $P(A)$ a $P(B)$.

Ve skutečnosti je to ještě jinak. „Nemít vliv“ není matematický termín a tak nemůžeme tímto způsobem rozhodovat zda jsou dva jevy nezávislé. Rozhodnutí je pak možné učinit pouze na základě toho, zda vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ platí nebo ne. \Rightarrow nejenže pro nezávislé jevy můžeme používat vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ale dokonce platnost tohoto vzorce rozhoduje o tom, zda jevy jsou nebo nejsou nezávislé.

Řekneme, že jevy A, B jsou nezávislé jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Př. 2: Ve třetím ročníku gymnázia propadá ve čtvrtletí průměru 5% studentů z matematiky, 2% studentů z fyziky a 1% studentů z obou předmětů. Rozhodni, zda jsou jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ nezávislé.

Uvedená procenta vezmeme jako pravděpodobnosti:

$$P(M) = 0,05, P(F) = 0,02, P(M \cap F) = 0,01$$

Dosadíme do vzorce: $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F)$

$$0,01 \neq 0,05 \cdot 0,02 = 0,001$$

Jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ jsou závislé (což není nic překvapivého).

Př. 3: U náhodného pokusu z prvního příkladu rozhodni nejdříve odhadem, poté dosazením do vzorce, zda jsou nezávislé dvojice jevů.:

a) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, E : „třetí se narodí hoch“

b) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, F : „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“

c) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, G : „pohlaví všech tří dětí je stejné“

Určíme potřebné pravděpodobnosti a dosadíme do vzorce

a) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, E : „třetí se narodí hoch“
jevy D a E jsou zřejmě nezávislé

jev D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“

$$D = \{(h, h, h), (h, h, d), (d, d, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

jev E : „třetí se narodí hoch“

$$E = \{(h, h, h), (h, d, h), (d, h, h), (d, d, h)\} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

jev $D \cap E$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a třetí se narodí hoch“

$$D \cap E = \{(h, h, h), (d, d, h)\} \Rightarrow P(D \cap E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy D a E jsou nezávislé

b) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, F : „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“
jevy D a F by mohly být nezávislé

jev F : „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“

$$F = \{(h, h, h), (h, d, h), (d, h, d), (d, d, d)\} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

jev $D \cap F$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“

$$D \cap F = \{(h, h, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(D \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap F) = P(D) \cdot P(F) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy D a F jsou nezávislé

c) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, G : „pohlaví všech tří dětí je stejné“
jevy jsou závislé, pokud není pohlaví prvních dvou dětí stejné, nemohou mít stejné pohlaví všechny tři děti

jev G : „pohlaví všech tří dětí je stejné“

$$G = \{(h, h, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

jev $D \cap G$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví všech tří dětí je stejné“

$$D \cap G = \{(h, h, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(D \cap G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap G) = P(D) \cdot P(G) \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$ jevy D a G nejsou nezávislé

Dodatek: Podobně jako můžeme určit zda jsou nezávislé jevy A, B pomocí vzorce

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, můžeme rozhodnout i o nezávislosti tří jevů A, B, C .

Jevy A, B, C jsou nezávislé právě když, jsou nezávislé:

a) každé dva z nich (\Rightarrow platí vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ a $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$)

b) všechny tři jevy dohromady (\Rightarrow platí vzorec

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$).

Analogicky je možné určovat nezávislost více jevů než tří.

Př. 4: Házíme modrou a bílou kostkou. Číslo, které padne na modré kostce značíme m , číslo na bílé kostce b . Rozhodni zda jsou nezávislé jevy:

- b) jev $A: m + b = 7$ a jev $B: m = 3$
- b) jev $C: m + b = 9$ a jev $D: m = 4$
- c) jev $C: m + b = 9$ a jev $E: m > 3$
- d) jev $F: m + b = 11$ a jev $G: m \neq 5$

Při hodu rozlišujeme barvy kostek \Rightarrow množinou všech možných výsledků bude množina všech uspořádaných dvojic čísel 1 až 6

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{array} \right\}$$

a) jev $A: m + b = 7$ a jev $B: m = 3$

zdánlivě stejný příklad jako v předchozím bodě

$P(A)$: možnosti, jak získat součet 7: $7 = 4 + 3 \Rightarrow 2$ možnosti, $7 = 5 + 2 \Rightarrow 2$ možnosti,

$$7 = 6 + 1 \Rightarrow 2 \text{ možnosti} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$P(B)$: možnosti, kde $m = 3$: celý třetí řádek tabulky $\Rightarrow 6$ možností

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$P(A \cap B)$: možnosti, jak získat součet 7 a $m = 3$: jediná možnost (3;4)

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow \text{jevy } A: m + b = 7 \text{ a } B: m = 3 \text{ jsou nezávislé}$$

b) jev $C: m + b = 9$ a jev $D: m = 4$

zdánlivě stejný příklad jako v předchozím bodě

$P(C)$: možnosti, jak získat součet 9: $9 = 4 + 5 \Rightarrow 2$ možnosti, $9 = 6 + 3 \Rightarrow 2$ možnosti

$$P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$P(D)$: možnosti, kde $m = 4$: celý čtvrtý řádek tabulky $\Rightarrow 6$ možností

$$P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$P(C \cap D)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m = 4$: jediná možnost (4;5)

$$P(C \cap D) = \frac{1}{36}$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C) \cdot P(D) = P(C \cap D)$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36} \Rightarrow \text{jev } C: m+b=9 \text{ a } D: m=4 \text{ nejsou nezávislé}$$

\Rightarrow někdy je doopravdy těžké dopředu odhadnout, zda jsou jevy závislé či nezávislé

c) jev $C: m+b=9$ a jev $E: m > 3$

$P(E)$: možnosti, kde $m > 3$: celý čtvrtý, pátý a šestý řádek tabulky \Rightarrow 18 možností

$$P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$P(C \cap E)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m > 3$: tři možnosti (4;5), (5;4), (6;3)

$$P(C \cap E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C) \cdot P(E) = P(C \cap E)$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{12} \Rightarrow \text{jev } C: m+b=9 \text{ a } E: m > 3 \text{ nejsou nezávislé}$$

d) jev $F: m+b=11$ a jev $G: m \neq 5$

$P(F)$: možnosti, jak získat součet 11: $11=6+5 \Rightarrow$ 2 možnosti

$$P(F) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$P(G)$: možnosti, kde $m \neq 5$: všechny řádky tabulky kromě pátého \Rightarrow 25 možností

$$P(G) = \frac{25}{36}$$

$P(F \cap G)$: možnosti, jak získat součet 11 a $m \neq 5$: jediná možnost (6;5)

$$P(F \cap G) = \frac{1}{36}$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(F) \cdot P(G) = P(F \cap G)$

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{648} \neq \frac{1}{36} \Rightarrow \text{jev } F: m+b=11 \text{ a } G: m \neq 5 \text{ nejsou nezávislé}$$

Př. 5: Petáková:

strana 172/cvičení 32

strana 172/cvičení 34

Shrnutí: Pokud jsou dva jevy nezávislé, pravděpodobnost toho, že nastanou oba najednou se rovná součinu pravděpodobností, že nastane každý z nich.