9.1.7 Kombinace I

Předpoklady: 9101, 9102, 9103, 9104, 9105

Př. 1: Urči kolika způsoby je možné ze třídy s 31 studenty vybrat dva zástupce do studentské rady (bez rozlišení funkce).

Vybíráme dvojici ze 31 studentů:
1. student … 31 možností
2. student … 30 možností (jeden už je vybraný)

možnosti můžeme kombinovat mezi sebou $\Rightarrow$ násobíme $31\cdot 30$, ale pozor, podobně jako u přímek (kde nezáleželo, který ze dvou bodů jsme vybrali první), ani tady nezáleží na tom, který ze studentů je vybrán první a který druhý $\Rightarrow$ dvojice Anna, Petr je shoduje s dvojicí Petr, Anna $\Rightarrow$ všechny dvojice jsem započítal dvakrát (jako by záleželo na pořadí vybrání) $\Rightarrow$ provizorní výsledek musíme vydělit dvěma. Na výběr reprezentantů do studentské rady má třída $\frac{31\cdot 30}{2}$ možností

Pedagogická poznámka: Většina studentů si už nepamatuje, že jsme podobný problém řešili v hodině 9102 a tak dospěje k výsledku $31\cdot 30$. Nemá cenu je nechávat příliš dlouho trápit. Rozebereme si příklad na tabuli a pak nechám studenty počítat zbývající příklady.
V dalších dvou příkladech s pak objevují opět problémy se jmenovateli zlomků, v první fázi však připomínám jenom to, že dvojka ve jmenovateli prvního příkladu neznamenala počet prvků, které jsme vybírali.

Př. 2: Urči kolik způsoby může učitel tělocviku ze 25 studentů vybrat tři, kteří odnesou pomůcky (záleží pouze na faktu vybrání).

Vybírám trojici studentů:
1. student … 25 možností
2. student … 24 možností
3. student … 23 možností

možnosti můžeme kombinovat mezi sebou $\Rightarrow$ násobíme $25\cdot 24\cdot 23$, ale pozor, podobně jako u předchozího příkladu ani tady nezáleží na pořadí, ve kterém jsme studenty vybrali $\Rightarrow$ náš výsledek musíme vydělit počtem možností, které nebudeme rozlišovat
kolika způsoby můžeme seřadit tři vybrané studenty: $3!$ $\Rightarrow$ možností, jak vybrat a nerozlišovat je $3!$ krát méně než možností, kdy pořadí rozlišujeme $\Rightarrow$ učitel může studenty vybrat $\frac{25\cdot 24\cdot 23}{3!}$ způsoby

Př. 3: Urči kolika způsoby může dopadnou rozdání čtyř mariášových karet na prší. Kompletní sada karet obsahuje 32 listů.

Vybíráme čtveřici karet:
1. karta … 32 možností
2. karta … 31 možností
3. karta … 30 možností

4. karta … 29 možností

možnosti můžeme kombinovat mezi sebou $\Rightarrow$ násobíme $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$, ale pozor, podobně jako u předchozího příkladu ani tady nezáleží na pořadí, ve kterém jsme karty vybrali (jde pouze o to, které karty na konci rozdávání držíme v ruce) $\Rightarrow$ náš výsledek musíme vydělit počtem možností, které nebudeme rozlišovat

kolika způsoby můžeme seřadit čtyři vybrané karty: $4!$ $\Rightarrow$ možností, jak vybrat a nerozlišovat je $4!$ krát méně než možností, kdy pořadí rozlišujeme $\Rightarrow$ rozdávání karet může dopadnout $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{4!}$ způsoby

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:

- mám *n* prvků
- z nich vybírám několik (*k*) prvků
- z prvků sestavuji *k*-tici
- **nezáleží** na pořadí prvků v *k*-ticí (tedy pořadí v jakém jsem vybíral)
- prvky se neopakují

$\Rightarrow$ *k*-tice, které jsme sestavovali se nazývají ***k*-členné kombinace**

k-členná kombinace z *n* prvků je **ne**uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet *k*-členných kombinací z *n* prvků značíme $K_k(n)$ nebo $K(k,n)$. Označuje jej jako **kombinační číslo**.

Př. 4: Urči počet *k*-členných kombinací z *n* prvků.

Vzorec pro *k*-členné variace z *n*-prvků známe: $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Počet kombinací je menší. U variací záleží na pořadí vybraných *k* prvků, u kombinací na pořadí vybraných *k* prvků nezáleží.

Počet možností, jak uspořádat vybraných *k* prvků: $k!$ $\Rightarrow$ z každé kombinace můžeme vytvořit $k!$ variací $\Rightarrow$ platí: $V_k(n) = k! \cdot K_k(n)$ (variací je $k!$ více) $\Rightarrow$

$$K_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Počet $K_k(n)$ *k*-členných kombinací z *n* prvků je $K_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Pro zlomek udávající hodnotu kombinačního čísla se velmi často užívá symbol $K_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$, čteme *n* nad *k*.

Př. 5: Rozepiš a vypočti:

a) $K_3(4)$ b) $K_{10}(5)$ c) $\binom{5}{2}$ d) $\binom{23}{4}$

a) $K_3(4) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$

b) $K_{10}(5)$ - nejde, nemůžeme vybrat deset prvků z pěti, tak aby byl každý jenom jednou

c) $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

d) $\binom{23}{4} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 = 8855$

Př. 6: Zapiš výsledky příkladů 1. až 3. pomocí kombinačních čísel.

Příklad 1: $K_2(31) = \binom{31}{2}$

Příklad 2: $K_3(25) = \binom{25}{3}$

Příklad 3: $K_4(32) = \binom{32}{4}$

Př. 7: Ve třídě je 14 chlapců a 17 dívek. Urči kolika způsoby je možné vybrat ze třídy pětičlennou skupinu tak, aby obsahovala
a) pět libovolných studentů třídy
b) právě tři dívky
c) alespoň čtyři chlapce

Skupina má mít pět studentů, ale jinak členy skupiny nerozlišujeme $\Rightarrow$ při výběru nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ při všech výběrech budeme vytvářet kombinace

a) vybírám pět libovolných studentů z 31 $\Rightarrow$ $K_5(31) = \binom{31}{5}$

b) máme vybrat právě tři dívky $\Rightarrow$ vybíráme 3 dívky a dva chlapce

- tři dívky ze 17 $\Rightarrow$ $K_3(17) = \binom{17}{3}$
- dva chlapci ze 14 $\Rightarrow$ $K_2(14) = \binom{14}{2}$

možnosti výběru dívek a chlapců můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem $\binom{17}{3} \cdot \binom{14}{2}$ možností

c) alespoň čtyři chlapce = právě čtyři chlapce nebo právě pět chlapců (nastane právě jedna z uvedených možností $\Rightarrow$ možnosti posčítáme) právě čtyři chlapce = čtyři chlapce a 1 dívka

- čtyři chlapci ze 14 $\Rightarrow$ $K_4(14)=\binom{14}{4}$
- jedna dívka ze 17 $\Rightarrow$ $K_1(17)=\binom{17}{1}$

možnosti výběru dívek a chlapců můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem $\binom{14}{4}\cdot\binom{17}{1}$ možností

právě pět chlapců $\Rightarrow$ vybíráme pět chlapců ze 14 $\Rightarrow$ $K_5(14)=\binom{14}{5}$

celkem: $\binom{14}{4}\cdot\binom{17}{1}+\binom{14}{5}$

Př. 8: Správné řešení příkladu 7 c) je dáno také vztahem
$\binom{31}{5}-\left[\binom{14}{0}\binom{17}{5}+\binom{14}{1}\binom{17}{4}+\binom{14}{2}\binom{17}{3}+\binom{14}{3}\binom{17}{2}\right]$. Vysvětli.

Vztah ze zadání je příkladem „obráceného výpočtu“. Od všech možných variant $\binom{31}{5}$ odečítáme počty možností, které nevyhovují zadání „alespoň čtyři chlapci“:

- žádný chlapec (a tedy 5 dívek): $\binom{14}{0}\cdot\binom{17}{5}$
- jeden chlapec (a tedy 4 dívky): $\binom{14}{1}\cdot\binom{17}{4}$
- dva chlapci (a tedy 3 dívky): $\binom{14}{2}\cdot\binom{17}{3}$
- tři chlapci (a tedy 2 dívky): $\binom{14}{3}\cdot\binom{17}{2}$

Př. 9: Petáková:
strana 146/cvičení 52
strana 146/cvičení 58
strana 146/cvičení 60
strana 146/cvičení 62

Shrnutí: Pokud při sestavování *k*-tice nezáleží na pořadí, vytváříme kombinace (podmnožiny). Počet kombinací udává kombinační číslo $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.