8.2.14 Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností

Předpoklady: 8105, 8201, 8205

Pedagogická poznámka: Cílem hodiny není naučit studenty tabulku, která uvádí, jak závisí vlastnosti posloupnosti na jejích koeficientech. I kdyby se studenti tyto údaje naučili za chvilku je zapomenou. Cílem hodiny je, aby studenti sami zkusili tuto tabulku objevit. Hodina má tři fáze:
Nejdříve studenti sepíšou tabulku vlastností. V druhé fázi prozkoumají vlastnosti aritmetických posloupností. Tabulky i způsob, jakým jsme ji získali společně probereme a zbývajících 30 (minimálně 25 minut) mají studenti na to, aby samostatně sestavili podobný přehled pro geometrickou posloupnost. Dopředu je upozorňuji, že u geometrických posloupností je situace složitější a je potřeba si lépe kontrolovat výsledky. Studenty, kteří dokáží sestavit oba přehledy, odměňuji jedničkou (ekvivalent písemky), těm, kteří sestaví alespoň přehled pro určování monotónnosti, zlepším jednu známku o stupeň.
Během práce studenty kontroluji, těm, co se snaží o získání jedničky hodnotím správnost, těm, kteří si neví rady, se snažím (pokud mám vůbec čas) trochu pomoci.

Př. 1: Sepiš vlastnosti, které jsme určovali u posloupnosti a způsoby, jakými tyto vlastnosti dokazujeme.

Vlastnost posloupnosti	pro každé $n \in N$ platí:
rostoucí	$a_n < a_{n+1}$
klesající	$a_n > a_{n+1}$
neklesající	$a_n \leq a_{n+1}$
nerostoucí	$a_n \geq a_{n+1}$
zdola omezená	$a_n \geq d$, $d \in R$
shora omezená	$a_n \leq H$, $H \in R$

V této hodině se budeme dále zabývat pouze tím, zda jsou posloupnosti omezené (omezené shora nebo zdola) a zda jsou rostoucí nebo klesající.

Př. 2: Otestuj několik aritmetických posloupností a zjisti, jak závisí vlastnosti těchto posloupností na hodnotách a_1 a d.

Zvolíme například:

$a_1 = 1, d = 2$ $\Rightarrow$ $1;3;5;7;9;11;13;...$ rostoucí, zdola omezená

$a_1 = 1, d = 0$ $\Rightarrow$ $1;1;1;1;1;1;1;...$ konstantní, omezená

$a_1 = 1, d = -3$ $\Rightarrow$ $1;-2;-5;-8;-11;-14;-17;...$ klesající, shora omezená

zkusím změnit a_1

$a_1 = -4, d = 2 \quad \Rightarrow \quad -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8; \ldots$ rostoucí, zdola omezená (vlastnosti po změně a_1 zůstali stejné)

záleží pouze na diferenci, první člen na vlastnosti nemá vliv

$\Rightarrow$
Aritmetická posloupnost je:

- rostoucí, právě když $d > 0$
- klesající, právě když $d < 0$
- konstantní, právě když $d = 0$

Aritmetická posloupnost je:

- zdola omezená, není shora omezená, právě když $d > 0$
- shora omezená, není zdola omezená, právě když $d < 0$
- omezená shora i zdola, právě když $d = 0$

Přehledy uvedené výše nemají z hlediska matematiky velkou cenu. Daleko cennější je postup, kterým jsme je objevili. U aritmetických posloupností je situace poměrně jednoduchá, ale přesto má stejné rysy jako například hledání závad (obecně ne v matematice). Neustále střídáme experimenty (psaní konkrétních posloupností) s hodnocením situace (jaké vlastnosti posloupnosti mají) a vymýšlením hypotéz o důvodech (který z koeficientů posloupnosti vlastnost způsobil), které ihned musíme testovat dalším experimentem (konkrétní posloupností, která by měla mít nějakou vlastnost). Velkou roli hraje naše schopnost vyzkoušet „všechny zajímavé“ možnosti.

Nyní zkusíme použít naše zkušenosti v znatelně obtížnější situaci, která nastane, když se pokusíme sestavit podobný přehled pro geometrické posloupnosti.

Př. 3: Otestuj několik geometrických posloupností a zjisti, jak závisí vlastnosti těchto posloupností na hodnotách a_1 a q.

Zvolíme například:
$a_1 = 1, q = 2 \quad \Rightarrow \quad 1; 2; 4; 8; 16; \ldots$ rostoucí, zdola omezená
$a_1 = -1, q = 2 \quad \Rightarrow \quad -1; -2; -4; -8; -16; \ldots$ klesající, shora omezená
$\Rightarrow$ tady záleží i na počátečním členu
$a_1 = 1, q = -2 \quad \Rightarrow \quad 1; -2; 4; -8; 16; \ldots$ ani rostoucí ani klesající, není omezená
$\Rightarrow$ když je kvocient záporný, neustále se střídají znaménka posloupnosti a posloupnost nemůže být ani rostoucí ani klesající
čísla se zmenšují, když násobím například 0,5
$a_1 = 1, q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$ klesající, omezená shora i zdola
$\Rightarrow$ už jednou se situace změnila, když jsem změnil znaménko prvního členu $\Rightarrow$
$a_1 = -1, q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}; \ldots$ rostoucí, omezená shora i zdola

Zkusíme situaci shrnout:
rostoucí posloupnosti:

- $a_1 = -1, q = 2$ - kladné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1 $\Rightarrow$ rostoucí budou všechny posloupnosti s $a_1 > 0$ a $q > 1$
- $a_1 = -1, q = \frac{1}{2}$ - záporné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále rostou k nule $\Rightarrow$ rostoucí budou všechny posloupnosti s $a_1 < 0$ a $0 < q < 1$

klesající posloupnosti:

- $a_1 = -1, q = 2$ - záporné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1 $\Rightarrow$ klesací budou všechny posloupnosti s $a_1 < 0$ a $q > 1$
- $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$ - kladné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále klesají k nule $\Rightarrow$ klesající budou všechny posloupnosti s $a_1 > 0$ a $0 < q < 1$

zbývající možnosti

- pro $a_1 \neq 0; q < 0$ není geometrická posloupnost ani rostoucí ani klesající, hodnoty neustále mění znaménko
- pro $a_1 = 0$ je geometrická posloupnost konstantní bez ohledu na q
- pro $a_1 \neq 0; q = 1$ je geometrická posloupnost konstantní

nyní můžeme přejít k omezenosti
máme posloupnosti rozdělené do sedmi skupin, pouze u skupiny $a_1 \neq 0; q < 0$ nevíme, jak je to s omezeností $\Rightarrow$ možnosti:
$a_1 = -2, q = -2$ $\Rightarrow$ $-2; 4; -8; 16; -32; \ldots$ posloupnost není omezená ani shora ani zdola, bude to tak platit pro všechna $q < -1$ (zvětšují absolutní hodnotu členů posloupnosti)
$a_1 = -2, q = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $-2; 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \ldots$ posloupnost je omezená shora i zdola, bude to platit pro všechna $-1 \leq q < 0$

Shrneme situaci pro omezenost:
shora i zdola omezená posloupnost

- $a_1 = -1, q = \frac{1}{2}$ - záporné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále rostou k nule $\Rightarrow$ platí pro $a_1 < 0$ a $0 < q < 1$
- $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$ - kladné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále klesají k nule $\Rightarrow$ platí pro $a_1 > 0$ a $0 < q < 1$
- pro $a_1 = 0$ je geometrická posloupnost konstantní bez ohledu na q
- pro $a_1 \neq 0; q = 1$ je geometrická posloupnost konstantní
- $a_1 = -2, q = -\frac{1}{2}$ - libovolné číslo násobím $q \in \langle -1; 0 \rangle$ hodnoty se postupně přibližují k nule (i když se mění jejich znaménka)

$\Rightarrow$ všechny možnosti můžeme shrnout do podmínky $|q| \leq 1$, na a_1 nezáleží

shora omezená, zdola neomezená

- $a_1 = -1, q = 2$ - záporné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1, členy posloupností klesají pod jakoukoliv mez platí vždy pro $a_1 < 0$ a $q > 1$

zdola omezená, shora neomezená

- $a_1 = -1, q = 2$ - kladné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1 $\Rightarrow$ členy rostou nade všechny meze, platí pro $a_1 > 0$ a $q > 1$

neomezená

- pro $a_1 = 1, q = -2$ členy neustále mění znaménko, jejich absolutní hodnota se neustále zvětšuje, platí pro $a_1 \neq 0; q < -1$

Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je:

- rostoucí, právě když $a_1 > 0, q > 1$ nebo $a_1 < 0, 0 < q < 1$
- klesající, právě když $a_1 < 0, q > 1$ nebo $a_1 > 0, 0 < q < 1$

Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je:

- omezená, právě když $|q| \leq 1$ nebo $a_1 = 0$
- zdola omezená, ale není shora omezená, právě když $a_1 > 0, q > 1$
- shora omezená, ale není zdola omezená, právě když $a_1 < 0, q > 1$
- není ani zdola omezená, ani shora omezená, právě když $a_1 \neq 0, q < -1$

Shrnutí: