

7.5.19 Hledání hyperbol

Předpoklady: 7516, 7517, 7518

Pedagogická poznámka: Některé příklady jsou zdlouhavější, pokud mám dostatek času probírám tuto a následující hodinu během tří vyučovacích hodin.

Př. 1: Napiš rovnici hyperboly, která má ohniska v bodech $E[-5;3]$, $F[7;3]$ a hlavní poloosu o délce 5.

Střed hyperboly je středem úsečky $EF \Rightarrow S[1;3]$.

Úsečka EF je rovnoběžná s osou $x \Rightarrow$ hlavní poloosou je $a = 5$.

Excentricita je vzdálenost ohniska od středu $e = |SE| = 6$.

Určíme vedlejší poloosu: $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$.

Rovnice hyperboly:
$$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{11} = 1$$

Př. 2: Najdi rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky $E[2;-3]$, $F[2;1]$.

Střed hyperboly je středem úsečky $EF \Rightarrow S[2;-1]$.

Úsečka EF je rovnoběžná s osou $y \Rightarrow$ hlavní poloosou je b .

Excentricita je vzdálenost ohniska od středu $e = |SE| = 2$.

Hyperbola je rovnoosá \Rightarrow platí $a = b$.

Určíme poloosy: $e^2 = a^2 + b^2$, dosadíme $a = b$: $e^2 = 2a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{e^2}{2}} = \sqrt{\frac{2^2}{2}} = \sqrt{2}$

Rovnice hyperboly:
$$\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2} = 1.$$

Pedagogická poznámka: Největším problémem je význam termínu rovnoosá hyperbola. Chci, aby jej studenti našli ve svých poznámkách.

Př. 3: Osy hyperboly jsou shodné s osami soustavy souřadnic, excentricita se rovná 5 a hyperbola prochází bodem $M[3;-4]$. Urči její rovnici.

Nevíme, která ze souřadných os je hlavní osou hledané hyperboly \Rightarrow dvě možnosti.

Hlavní osou hyperboly je osa x \Rightarrow hyperbola má rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Dvě neznámé, máme jediný bod na dosazování \Rightarrow potřebujeme další rovnici, použijeme informaci o excentricitě: $e = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 25 - a^2$.

Dosadíme do rovnice:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25 - a^2} = 1.$$

$$\text{Dosadíme bod } M[3; -4]: \frac{3^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{25 - a^2} = 1 \quad / \cdot a^2 (25 - a^2).$$

$$9(25 - a^2) - 16a^2 = a^2(25 - a^2)$$

$$225 - 9a^2 - 16a^2 = 25a^2 - a^4$$

$$a^4 - 50a^2 + 225 = 0 \quad \text{provedeme substituci } a^2 = x.$$

$$x^2 - 50x + 225 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 225}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm 40}{2}$$

Dvě řešení:

- $x_1 = \frac{50 + 40}{2} = 45 \Rightarrow a_1^2 = 45 \Rightarrow b^2 = 25 - a^2 = 25 - 45 = -20$ nesmysl $\Rightarrow a_1^2 = 45$ není řešení.
- $x_2 = \frac{50 - 40}{2} = 5 \Rightarrow a_2^2 = 5 \Rightarrow b^2 = 25 - a^2 = 25 - 5 = 20 \Rightarrow a^2 = 5$ je řešení.

Hledaná hyperbola má v případě, že její hlavní osa je totožná s osou x rovnicí $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$.

Ted' druhá možnost: **Hlavní osou hyperboly je osa y** \Rightarrow hyperbola má rovnici $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Opět dosadíme za b : $b^2 = 25 - a^2$ do rovnice: $\frac{y^2}{25 - a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

$$\text{Dosadíme bod } M[3; -4]: \frac{(-4)^2}{25 - a^2} - \frac{3^2}{a^2} = 1 \quad / \cdot a^2 (25 - a^2).$$

$$16a^2 - 9(25 - a^2) = a^2(25 - a^2)$$

$$16a^2 - 225 + 9a^2 = 25a^2 - a^4$$

$$a^4 - 225 = 0 \quad \text{platí: } \sqrt{225} = 15$$

$$a^4 - 15^2 = 0$$

$$(a^2 - 15)(a^2 + 15) = 0$$

Dvě řešení:

- $a_1^2 = 15 \Rightarrow b^2 = 25 - a^2 = 25 - 15 = 10 \Rightarrow a^2 = 15$ je řešení.
- $a_2^2 = -15 \Rightarrow$ nesmysl, druhá mocnina nemůže být záporná.

Hledaná hyperbola má v případě, že její hlavní osa je totožná s osou y rovnicí $\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{15} = 1$.

Pedagogická poznámka: Jen málokterý student přijde i po upozornění na to, že hledaná hyperbola může mít svislou hlavní osu a je tedy třeba dosazovat i do rovnice

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Nemá cenu nechávat studenty na tomto místě příliš dlouho stát.

Př. 4: Napiš rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je shodná s osou x a vedlejší s osou y a která prochází body $M[2; \sqrt{6}]$ a $N[\sqrt{3}; 2]$.

Hyperbola má rovnici: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ máme dvě neznámé, ale můžeme dosazovat dva body \Rightarrow řešíme soustavu dvou rovnic.

$$\text{Dosadíme bod } M[2; \sqrt{6}]: \frac{2^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{6})^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot a^2 b^2.$$

$$\text{Dosadíme bod } N[\sqrt{3}; 2]: \frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot a^2 b^2.$$

$$4b^2 - 6a^2 = a^2 b^2$$

$$3b^2 - 4a^2 = a^2 b^2 \quad \text{provedeme substituci: } a^2 = x, b^2 = y$$

$$4y - 6x = xy$$

$$3y - 4x = xy$$

Od první rovnice odečteme druhou: $y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x$.

Dosadíme do první rovnice: $4 \cdot 2x - 6x = x \cdot 2x$.

$$2x = 2x^2$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

- $x_1 = a_1^2 = 0$ nesmysl, poloosa nemůže být nulová.
- $x_2 = 1 = a^2$ rozumný výsledek $y = 2x = 2 \cdot 1 = 2 = b^2$.

Hledaná hyperbola má rovnici $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Pedagogická poznámka: Ještě výhodnější substitucí je $\frac{1}{a^2} = x, \frac{1}{b^2} = y$.

Př. 5: Napiš rovnici hyperboly, jestliže její asymptoty mají rovnice $y = \pm 2x - 1$ a ohnisko je v bodě $F[5; -1]$.

Potřebujeme určit střed hyperboly. Střed hyperboly je průsečíkem asymptot \Rightarrow hledáme společný bod přímk $y = 2x - 1$ a $y = -2x - 1 \Rightarrow$ srovnávací metoda $2x - 1 = -2x - 1$.

$$4x = 0 \quad x = 0 \quad y = 2x - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

Asymptoty se protínají v bodě $S[0; -1]$, který je středem hyperboly.

Známe excentricitu: $e = |SF| = 5$.

Velikosti poloos udávají směrnice asymptot $\Rightarrow \frac{b}{a} = k = 2 \Rightarrow b = 2a$.

Dosadíme do vztahu mezi poloosami a excentricitou:

$$e^2 = 5^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$$

$$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

$$b = 2a = 2\sqrt{5}$$

Rovnice hledané hyperboly: $\frac{x^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{20} = 1$.

Př. 6: Najdi rovnici hyperboly, která prochází bodem $M [3; -1]$ a jejíž asymptoty mají rovnice: $a_1 : 3x - y - 1 = 0$, $a_2 : 3x + y - 5 = 0$.

Podobný příklad jako předchozí. Střed hyperboly určíme jako průsečík asymptot:

- $a_1 : 3x - y - 1 = 0 \Rightarrow 3x = y + 1$
- $a_2 : 3x + y - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 - y$

Srovnáme obě rovnice: $y + 1 = 5 - y$.

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Dopočítáme x : $3x - y - 1 = 3x - 2 - 1 = 0$.

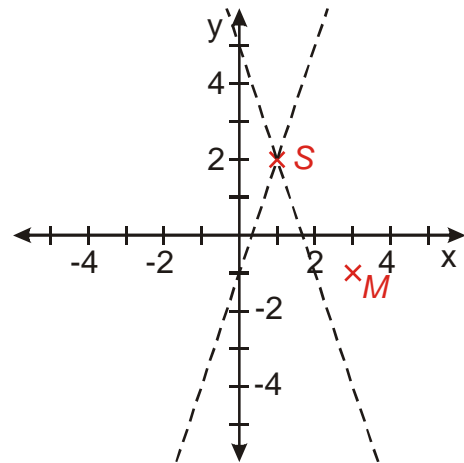
$$x = 1$$

Hyperbola má střed v bodě $S [1; 2]$.

Ze směrníc asymptot určíme poměr poloos: $k = 3 = \frac{b}{a} \Rightarrow b = 3a$.

Zbývá určit, zda má hledaná hyperbola hlavní osu vodorovnou nebo svislou.

Nakreslíme si obrázek:



Z obrázku je vidět, že bod M leží napravo od asymptot \Rightarrow hledaná hyperbola má hlavní osu

vodorovnou \Rightarrow rovnice $\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{(3a)^2} = 1$.

Dosadíme bod $M [3; -1]$ a dopočítáme hlavní poloosu: $\frac{(3-1)^2}{a^2} - \frac{(-1-2)^2}{(3a)^2} = 1$.

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{9a^2} = 1 \quad / \cdot 9a^2$$

$$36 - 9 = 9a^2$$

$$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$b = 3a = 3\sqrt{3}$$

Hledaná hyperbola má rovnici $\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{27} = 1$.

Př. 7: Petáková:
strana 126/cvičení 43
strana 126/cvičení 48
strana 126/cvičení 52
strana 126/cvičení 53

Shrnutí: