7.5.12 Parabola

Předpoklady: 7501, 7507

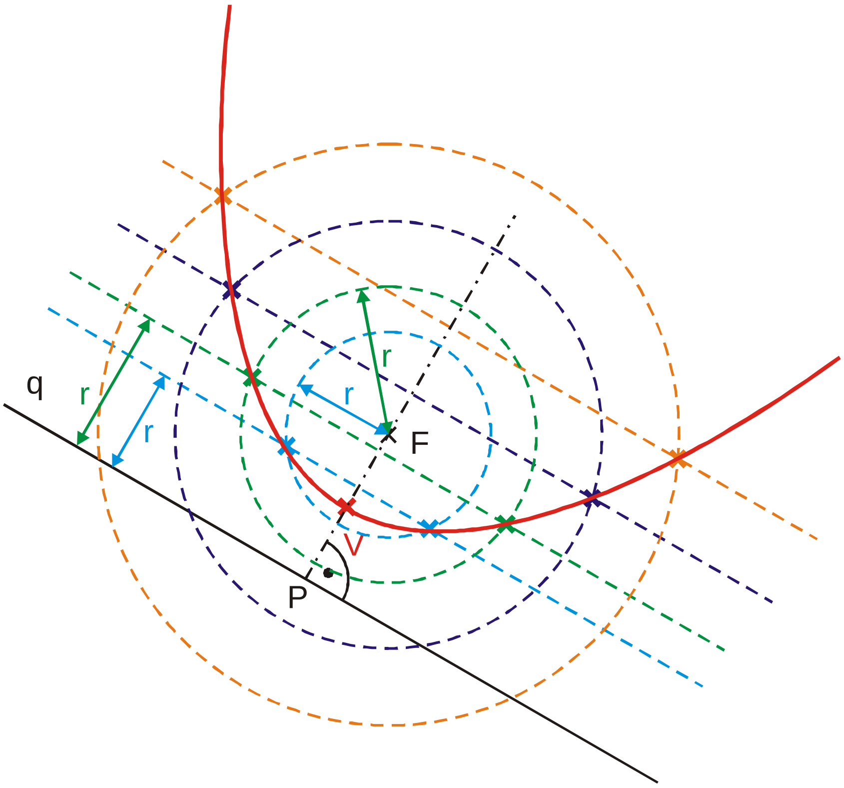
Pedagogická poznámka: Na všechny příklady je potřeba asi jeden a půl vyučovací hodiny.

Parabolu už známe:

- matematika: Grafem každé kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ je parabola.
- fyzika: Předmět, který hodíme z věže vodorovně, se pohybuje po parabole (podobně při šikmém vrhu).
- technika: Satelitní signál přijímáme pomocí parabol (parabolických antén).

Planimetrická definice paraboly:
V rovině je dán bod F a přímka q, která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky q, se nazývá **parabola**. Bod F se nazývá **ohnisko**, přímka q **řídící přímka** paraboly.

Př. 1: V rovině je dán bod F a přímka q, která jím neprochází. Nakresli několik bodů paraboly, pro kterou je bod F ohniskem a přímka q řídící přímkou.



- Sestrojíme kolmici na přímku q, procházející ohniskem F. Patu kolmice označíme P. Střed úsečky FP je bodem paraboly, značíme ho V a říkáme mu **vrchol**.
- V libovolné vzdálenosti r větší než je vzdálenost $|Vq|$ narýsujeme rovnoběžku s q. Stejnou barvou narýsujeme kružnici $k(F;r)$. Průsečíky kružnice s rovnoběžkou jsou další body paraboly.

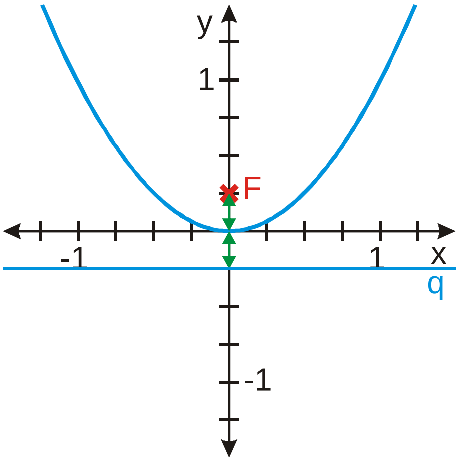
- Stejný postup jsme provedli v několika barvách. Získali jsme vždy dvojici bodů souměrných podle **osy paraboly** přímky VF $\Rightarrow$ parabola je osově souměrná podle přímky VF.

Pedagogická poznámka: Na konstrukci jiných bodů než vrcholu většina studentů nepřijde. I když je příklad důležitý, nemá cenu řešení příliš protahovat, lepší je ukázat konstrukci jedné dvojice bodů a nechat studenty, aby našli další.

Propojíme naši definici paraboly s parabolou jako grafem kvadratické funkce. Ukážeme si, že grafem funkce $y = x^2$ je parabola s ohniskem $F\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Př. 2: Urči řídící přímku paraboly $y = x^2$ za předpokladu, že jejím ohniskem je bod $F\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

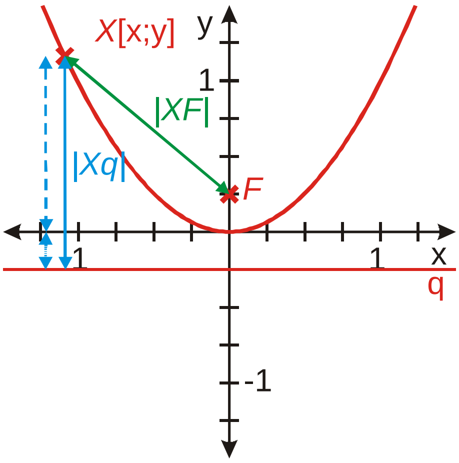
Nakreslíme obrázek:



Vzdálenost mezi vrcholem a ohniskem se rovná vzdálenosti mezi vrcholem a řídící přímkou $\Rightarrow$ vidíme, že řídící přímkou je přímka $y = -\frac{1}{4}$.

Př. 3: Dokaž, že grafem kvadratické funkce $y = x^2$ je parabola s ohniskem v bodě $F\left[0;\frac{1}{4}\right]$ a řídící přímkou $y = -\frac{1}{4}$.

Napíšeme si podmínku pro body na parabole: $|XF| = |Xq|$.



Určujeme vzdálenost $|Xq|$.

Vzdálenost $|Xq|$ je složena ze dvou částí:

- čárkovaná část se rovná y-souřadnici bodu X,
- tečkovaná (krátká) se rovná $\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ Platí: $|Xq| = \left|y + \frac{1}{4}\right|$. (absolutní hodnota zajišťuje platnost vztahu i pro záporné hodnoty y)

Dosadíme do rovnosti $|XF| = |Xq|$:

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = \left|y + \frac{1}{4}\right| \qquad /^2 \text{ (umocněním se zbavíme odmocniny i absolutní hodnoty)}$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

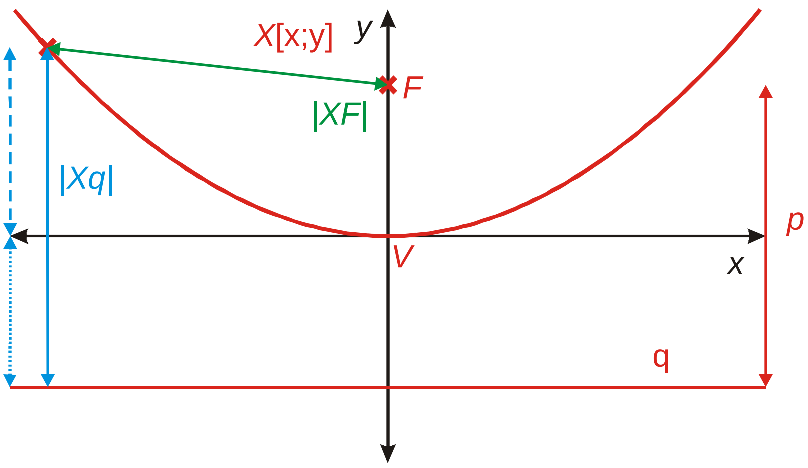
$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$$

$x^2 = y$ Přesně v to jsme doufali.

Pedagogická poznámka: Je třeba dát pozor na to, aby studenti pochopili rovnici pro vzdálenost $|Xq|$.

Teď si můžeme odvodit rovnici paraboly, nejdřív ve speciální poloze, kterou jsme dosud používali.

Př. 4: Osa paraboly je shodná s osou y, vrchol paraboly leží v počátku soustavy souřadnic. Vzdálenost mezi ohniskem a řídící přímkou si označíme p. Urči souřadnice ohniska paraboly a rovnici její řídící přímky. Dosazením do podmínky pro body paraboly odvoď její rovnici.



Z obrázku je vidět, že platí: $F\left[0; \frac{p}{2}\right]$, $y = -\frac{p}{2}$.

$|XF| = |Xq|$

Podobně jako v předchozím příkladě platí: $|Xq| = \left| y + \frac{p}{2} \right|$.

$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2} \right)^2} = \left| y + \frac{p}{2} \right| \qquad /^2$

$x^2 + \left(y - \frac{p}{2} \right)^2 = \left(y + \frac{p}{2} \right)^2$

$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$

$x^2 = 2py$

Pedagogická poznámka: Na začátku je třeba zkontrolovat, zda mají studenti správně určené souřadnice ohniska a rovnici řídící přímky.

Parabola s ohniskem $F\left[0; \frac{p}{2}\right]$ a řídící přímkou $y = -\frac{p}{2}$ je dána rovnicí $x^2 = 2py$ (kde $p > 0$ je vzdálenost ohniska od řídící přímky). Vrcholem této paraboly je bod $V[0;0]$, osou paraboly je souřadná osa *y* a parabola leží v polorovině $y \geq 0$.

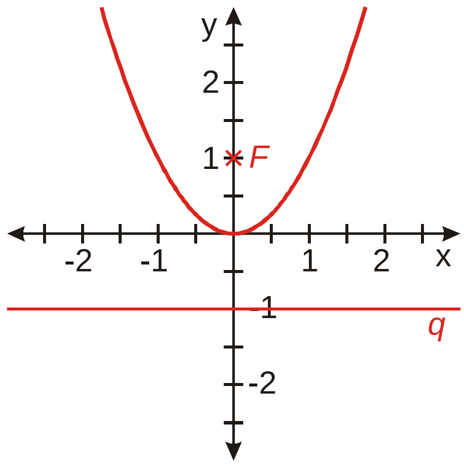
Pedagogická poznámka: Se vzdáleností *p* jsou velké problémy. Studentům přijde přirozené, že by písmenem *p* měla být označena vzdálenost ohniska od vrcholu (což bych chápal i já) nebo že by *p* měla být dvojnásobná, abychom získali rovnici $x^2 = 2py$. Říkám jim, že oba nápady jsou samozřejmě možné, ale volba už byla učiněna a my se ji musíme přizpůsobit. Je třeba však počítat s tím, že v následujících příkladech bude *p* působit mnohé problémy.

Př. 5: Parabola je dána rovnicí $y = \frac{x^2}{4}$. Urči souřadnice ohniska, rovnici řídící přímky a načrtni její obrázek.

Upravíme si rovnici do tvaru $x^2 = 2py$: $y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow x^2 = 2 \cdot 2y$.

Vrchol paraboly $V[0;0]$. Vidíme, že platí: $p = 2$.

Ohnisko paraboly: $F\left[0; \frac{p}{2}\right] = F[0;1]$. Řídící přímka: $y = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} = -1$.



Př. 6: Parabola je dána rovnicí $x^2 = -4y$. Urči souřadnice ohniska, rovnici řídící přímky a načrtni její obrázek.

Téměř stejná parabola jako v předchozím příkladě.
Upravíme si rovnici do tvaru $x^2 = 2py$: $x^2 = -4y \Rightarrow x^2 = -2 \cdot 2y$.
Srovnáme s rovnicí z předchozího příkladu:

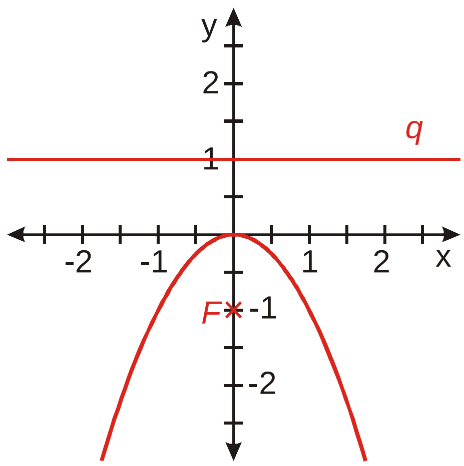
Předchozí rovnice: $x^2 = 2 \cdot 2y$.

Levá strana rovnice: nezáporná čísla (x^2) $\Rightarrow$ y na pravé straně musí být také nezáporné.

Aktuální rovnice: $x^2 = -2 \cdot 2y$

Levá strana rovnice: nezáporná čísla (x^2) $\Rightarrow$ y na pravé straně musí být záporné (nebo nula), aby po vynásobení mínusem vyšlo kladné číslo (nebo nula).

$\Rightarrow$ Až na znaménko y vyhovují rovnici stejné dvojice čísel jako v předchozím příkladě $\Rightarrow$ graf paraboly $x^2 = -2 \cdot 2y$ bude překlopený pod osu x do poloroviny $y \le 0$.



Vidíme, že platí: $p = 2$.

Ohnisko paraboly: $F\left[0; -\frac{p}{2}\right] = F[0;-1]$.

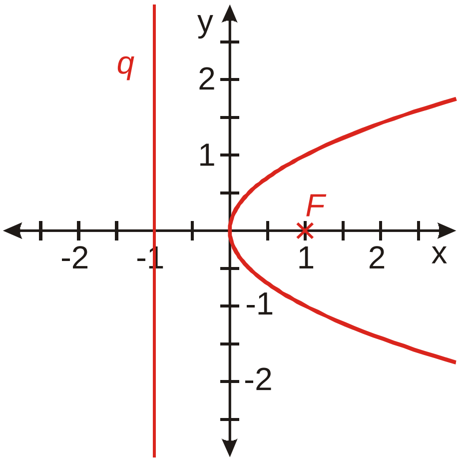
Řídící přímka: $y = \frac{2}{2} = 1$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají tendenci upravit rovnici do tvaru $x^2 = 2 \cdot (-2)y$ a psát $p = -2$. Opět je třeba se vrátit ke kořenům, kdy jsme si řekli, že p má význam vzdálenosti a musí být tedy nezáporné.

Existují ještě další dva typy parabol s vrcholem v počátku soustavy souřadnic.

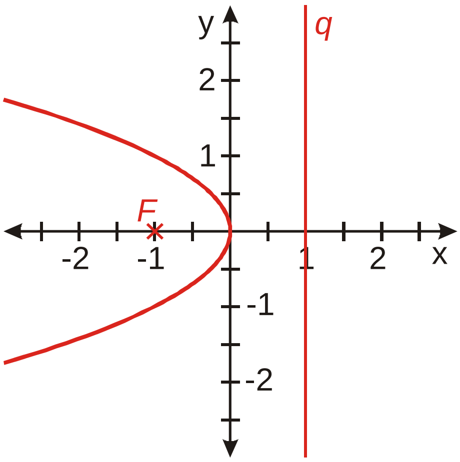
Př. 7: Urči souřadnice ohniska, rovnici řídící přímky a načrtni obrázek parabol daných rovnicí: a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = -4x$.

a) Parabola $y^2 = 4x$. Rovnice je podobná rovnici $x^2 = 4y$, pouze jsou prohozeny souřadnice x a y $\Rightarrow$ osou paraboly bude souřadná osa x.
Upravíme rovnici na základní tvar: $y^2 = 2\cdot 2x$ $\Rightarrow$ pokud mají souhlasit znaménka obou stran graf bude ležet v polorovině $x \geq 0$.
$y^2 = 2\cdot 2x$ $\Rightarrow$ platí: $p = 2$. Vrchol paraboly $V[0;0]$.



Ohnisko paraboly: $F\left[\frac{p}{2};0\right] = F[1;0]$. Řídící přímka: $x = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} = -1$.

b) Parabola $y^2 = -4x$. Rovnice je podobná rovnici $y^2 = 4x$, pouze se na pravé straně rovnice vyskytuje mínus $\Rightarrow$ pokud mají souhlasit znaménka obou stran graf bude ležet v polorovině $x \leq 0$.
Upravíme rovnici na základní tvar: $y^2 = -2\cdot 2x$ $\Rightarrow$ platí: $p = 2$. Vrchol paraboly $V[0;0]$.



Ohnisko paraboly: $F\left[-\frac{p}{2};0\right] = F[-1;0]$. Řídící přímka: $x = \frac{p}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Pedagogická poznámka: Studenti nemají s příkladem velké problémy.

Př. 8: Je dána kvadratická funkce $y = ax^2$. Urči její ohnisko a řídící přímku.

Rovnici převedeme do základního tvaru: $y = ax^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a} y \Rightarrow x^2 = 2\frac{1}{2a} y$.

Vidíme, že platí: $p = \frac{1}{2a}$. Vrchol paraboly $V[0;0]$.

Ohnisko paraboly: $F\left[0;\frac{p}{2}\right] = F\left[0;\frac{1}{4a}\right]$. Řídící přímka: $y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4a}$.

Př. 9: Petáková:
strana 127/cvičení 57 b) d)

Shrnutí: Parabola s vrcholem v počátku je popsána rovnicí $x^2 = \pm 2py$ nebo $y^2 = \pm 2px$, kde parametr $p \geq 0$ udává vzdálenost ohniska od řídící přímky.