7.5.9 Obecná rovnice elipsy

Př. 1: Najdi střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí $(x-2)^2+4(y+1)^2=1$.

$\frac{(x-2)^2}{1}+\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}}=1$. Z rovnice víme: $S[2;-1]$, $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ „ležatá“ elipsa

$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A[3;-1]$, $B[1;-1]$, $C[2;-0,5]$, $D[2;-1,5]$.

$E\left[2+\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right]$, $F\left[2-\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right]$.

$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \quad / \cdot a^2b^2$.

$b^2x^2+a^2y^2-2b^2mx-2a^2ny+m^2b^2+n^2a^2-a^2b^2=0$

$px^2+qy^2+2rx+2sy+t=0$ - **obecná rovnice elipsy**

Př. 2: U elipsy dané rovnicí $4x^2+y^2-8x+4y+4=0$ najdi střed a urči velikosti poloos.

$4x^2+y^2-8x+4y+4=4x^2-8x+y^2+4y+4=0$

$4\left(x^2-2x+1^2-1^2\right)+(y+2)^2-2^2+4=0 \qquad 4(x-1)^2+(y+2)^2=4$

$(x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ můžeme psát i jako: $\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$.

Elipsa má střed v bodě $S[1;-2]$, hlavní poloosa je $b=2$, vedlejší poloosa je $a=1$.

Př. 3: Úpravou na středový tvar rozhodni, které z uvedených rovnic jsou rovnicí elipsy. U všech nalezených elips urči poloosy, střed (v případě dostatku času i souřadnice vrcholů a ohnisek).

a) $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$

b) $x^2+4y^2+6x-16y+16=0$

c) $9x^2+4y^2-18x-8y+14=0$

d) $25x^2+16y^2-100x+32y+115=0$

e) $4x^2+12x+3y^2=0$

a) $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0 \qquad 4\left(x^2+4x\right)+9\left(y^2-2y\right)-11=0$

$4\left(x^2+2x\cdot 2+2^2-2^2\right)+9\left(y^2-2y+1^2-1^2\right)-11=0 \quad 4(x+2)^2+9(y-1)^2=36 \quad /:36$

$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ $\Rightarrow$ „ležatá“ elipsa. $S[-2;1]$, $a=3$, $b=2$,

$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$A[1;1]$, $B[-5;1]$, $C[-2;3]$; $D[-2;-1]$, $F\left[-2+\sqrt{5};1\right]$, $E\left[-2-\sqrt{5};1\right]$.

b) $x^2+4y^2+6x-16y+16=0 \qquad x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2+4\left(y^2-4y\right)+16=0$

$(x+3)^2-3^2+4\left(y^2-2y\cdot2+2^2-2^2\right)+16=0$ $\quad (x+3)^2-3^2+4(y-2)^2-4\cdot2^2+16=0$

$(x+3)^2+4(y-2)^2=9 \quad /:9$ $\quad \frac{(x+3)^2}{9}+4\frac{(y-2)^2}{9}=1$ $\quad \frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}}=1 \Rightarrow$

$S[-3;2]$, $a=3$, $b=\frac{3}{2}$, $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$A[0;2]$, $B[-6;2]$, $C\left[-3;\frac{7}{2}\right]$; $D\left[-3;\frac{1}{2}\right]$, $F\left[-3+\frac{3}{2}\sqrt{3};2\right]$, $E\left[-3+\frac{3}{2}\sqrt{3};2\right]$.

c) $9x^2+4y^2-18x-8y+14=0$ $\quad 9\left(x^2-2x+1^2-1^2\right)+4\left(y^2-2y+1^2-1^2\right)+14=0$

$9(x-1)^2-9\cdot1+4(y-1)^2-4\cdot1+14=0$ $\quad 9(x-1)^2+4(y-1)^2=-1 \Rightarrow$ Nejde o rovnici elipsy, této rovnici nevyhovuje žádný bod roviny.

d) $25x^2+16y^2-100x+32y+115=0$ $\quad 25\left(x^2-4x\right)+16\left(y^2+2y\right)+115=0$

$25\left(x^2-2x\cdot2+2^2-2^2\right)+16\left(y^2+2y+1^2-1^2\right)+115=0$

$25(x-2)^2-25\cdot2^2+16(y+1)^2-16\cdot1^2+115=0$

$25(x-2)^2+16(y+1)^2=1$ $\quad$ Nemůžeme dělit (musíme čísla převést do jmenovatelů).

$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{25}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{16}}=1 \Rightarrow S[2;-1]$, $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{4}$, $e=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{400}}=\frac{3}{20}$.

$C\left[2;-\frac{3}{4}\right]$; $D\left[2;-\frac{5}{4}\right]$, $A\left[\frac{11}{5};-1\right]$, $B\left[\frac{9}{5};-1\right]$, $F\left[2;-\frac{17}{20}\right]$, $E\left[2;-\frac{23}{20}\right]$.

e) $x^2+3x+3y^2=0$ $\quad x^2+2x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3y^2=0$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+3y^2=\frac{9}{4} \quad /:\frac{9}{4}$ $\quad \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1 \Rightarrow$ „ležatá“ elipsa.

$S\left[\frac{3}{2};0\right]$, $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$A[3;0]$, $B[0;0]$, $C\left[\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; $D\left[\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $F\left[\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2};0\right]$, $E\left[\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2};0\right]$.

Př. 4: Petáková:
strana 128/cvičení 75 b) d) e) f)