

7.5.2 Hledání kružnic I

Př. 1: Kružnice je dána obecnou rovnicí $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = 0$. Najdi její střed a poloměr. Rozhodni, zda na kružnici leží bod $A[1; -1]$.

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 2 =$$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 8 \Rightarrow \text{Kružnice má střed v bodě } S[-1; -3] \text{ a poloměr } r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = 1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + 2 = 0 \Rightarrow \text{Bod } A[1; -1] \text{ leží}$$

Př. 2: Pro které hodnoty parametru p je rovnice $x^2 + y^2 + 2x - 6y + p = 0$ obecnou rovnicí kružnice? Urči souřadnice jejího středu a její poloměr.

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + p = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + p = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10 - p$$

$$10 - p > 0 \Rightarrow p < 10 \text{ Středem v bodě } S[-1; 3] \text{ a poloměrem } r = \sqrt{10 - p}.$$

Př. 3: Napiš středovou rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[-1; 3]$ a prochází bodem $A[1; 1]$.

$$r = |SA| = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Hledaná kružnice má poloměr $r = 2\sqrt{2}$ a středovou rovnici $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$

Př. 4: Najdi středový tvar rovnice kružnice k , jestliže úsečka AB , $A[-2; 3]$, $B[4; 1]$ je jedním z jejích průměrů. Zjisti, zda na kružnici leží bod $C[2; 5]$. Najdi všechny body, které leží na kružnici a jejichž x -ová souřadnice je rovna 0. Ještě před vyřešením poslední části příkladu rozhodni, kolik takových bodů může být.

Střed kružnice = střed úsečky AB : $S = S_{AB} \Rightarrow S[1; 2] . \Rightarrow$

$$r = |AS| = \sqrt{(1-[-2])^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10} . \text{ Středová rovnice: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10 .$$

$$\text{Bod } C[2; 5] : (2-1)^2 + (3-2)^2 = 10$$

$$1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow \text{Bod } C[2; 5] \text{ leží na kružnici } k.$$

Hledáme body s nulovou x -ovou souřadnicí ležící na kružnici $k \Rightarrow$ vlastně hledáme průsečíky přímky (osy y) s kružnicí $k \Rightarrow 0, 1$ nebo 2 řešení.

Dosadíme body $X[0; y]$ do rovnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

$$(0-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \Rightarrow \text{kvadratická rovnice} \Rightarrow 0, 1 \text{ nebo } 2 \text{ řešení.}$$

$$1 + y^2 - 4y + 4 = 10 \quad y^2 - 4y - 5 = 0 \quad (y-5)(y+1) = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = 5 \Rightarrow \text{bod } X_1[0; 5] \quad y_2 = -1 \Rightarrow \text{bod } X_2[0; -1]$$

Př. 5: Najdi kružnici, která prochází body $A[-2; 2]$, $B[4; 0]$ a jejíž střed leží na přímce $p: x - y + 2 = 0$.

Hledáme střed kružnice (poloměr snadno dopočítáme po jeho nalezení) \Rightarrow potřebujeme určit dvě souřadnice \Rightarrow potřebujeme dvě rovnice.

1. rovnice: Střed leží na přímce $p \Rightarrow$ musí vyhovovat její rovnici.

2. rovnice: \Rightarrow střed kružnice leží na ose úsečky AB .

Střed úsečky AB : $S_{AB} \left[\frac{-2+4}{2}; \frac{2+0}{2} \right] \Rightarrow S_{AB} [1;1]$.

Směrový vektor úsečky AB je normálový vektor osy: $\mathbf{u}_{AB} = B - A = (6; -2) \Rightarrow \mathbf{n}_o = (3; -1)$.

Rovnice osy: $3x - y + c = 0$. Osa prochází bodem $S_{AB} [1;1] \Rightarrow 3 \cdot 1 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

Rovnice osy: $3x - y - 2 = 0$.

Řešíme soustavu: $x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = x + 2$
 $3x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 3x - 2$

Srovnávací metoda: $x + 2 = 3x - 2$.

$2x = 4 \quad x = 2 \Rightarrow y = x + 2 = 2 + 2 = 4$

Hledaná kružnice má střed v bodě $S [2;4]$.

Poloměr: $r = |SA| = \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2} = \sqrt{(2 - [-2])^2 + (4 - 2)^2} = 2\sqrt{5}$

Středová rovnice hledané kružnice je $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$.

Př. 6: Najdi kružnici, která prochází body $A[0;0]$, $B[1;3]$, $C[4;2]$. Urči její střed a poloměr.

1. napodobení geometrické konstrukce

$S_{AB} \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right]$, $\mathbf{u}_{AB} = (1;3) \Rightarrow \mathbf{n}_o = (1;3)$ Osa úsečky AB : $x + 3y - 5 = 0$.

$S_{AC} [2;1]$, $\mathbf{u}_{AC} = (4;2) \Rightarrow \mathbf{n}_o = (2;1)$ Osa úsečky AC : $2x + y - 5 = 0$.

Řešíme soustavu: $x + 3y - 5 = 0$
 $2x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 - 2x$

Dosadíme do první rovnice: $x + 3(5 - 2x) - 5 = 0$.

$x + 15 - 6x - 5 = 0 \quad 5x = 10 \quad x = 2 \Rightarrow y = 5 - 2x = 5 - 2 \cdot 2 = 1$.

Kružnice má střed v bodě $S [2;1]$. Poloměr: $r = |SA| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$

Středová rovnice hledané kružnice: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

2. Dosazení do obecné rovnice kružnice

Rovnici je možné napsat v obecném tvaru: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$. Rovnice obsahuje tři neznámé \Rightarrow potřebujeme tři rovnice.

$A[0;0]$: $0^2 + 0^2 - 2m \cdot 0 - 2n \cdot 0 + p = 0 \Rightarrow p = 0$ ($p = 0$ dosazujeme i do dalších rovnic)

$B[1;3]$: $1^2 + 3^2 - 2m \cdot 1 - 2n \cdot 3 + 0 = 0 \Rightarrow 2m + 6n = 10$

$C[4;2]$: $4^2 + 2^2 - 2m \cdot 4 - 2n \cdot 2 + 0 = 0 \Rightarrow 8m + 4n = 20$

\Rightarrow Řešíme soustavu: $m + 3n = 5$ (stejná soustava jako u předchozího postupu).
 $2m + n = 5 \Rightarrow n = 5 - 2m$

Dosadíme do první rovnice: $m + 3(5 - 2n) = 5$.

$m + 15 - 6m = 5 \quad m = 2 \quad n = 5 - 2m = 5 - 2 \cdot 2 = 1$

Kružnice má obecnou rovnici: $x^2 + y^2 - 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1y + 0 = 0$.

$x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2 \cdot 1y + 1^2 - 1^2 + 0 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 5 = 0$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S [2;1]$ a poloměr $r = \sqrt{5}$.

Př. 7: Rozhodni a zdůvodni, kdy je který z obou postupů na řešení předchozího příkladu výhodnější.

Př. 8: Petáková:
 strana 124/cvičení 5 a) d)
 strana 124/cvičení 7 a)