7.3.15 Další metrické úlohy I

Př. 1: Je dána přímka $p: 2x - y + 1 = 0$. Najdi přímku, která je s přímkou p středově souměrná podle středu $S[-2;1]$.

Hledáme body na přímce p: $A[0;?] \Rightarrow A[0;1]$, $B[1;?] \Rightarrow B[1;3]$.

$A' = S + (S - A) = [-2;1] + (-2;0) = [-4;1]$, $B' = S + (S - B) = [-2;1] + (-3;-2) = [-5;-1]$.

Rovnice $A'B'$: $(B' - A') = (-1;-2) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (2;-1)$. Rovnice přímky $A'B'$: $2x - y + 9 = 0$.

Př. 2: Najdi obraz B bodu $A[4;-4]$ v osové souměrnosti podle osy $o: x - 3y + 4 = 0$.

1. Kolmice *p* na přímku *o* procházející bodem *A* $\boldsymbol{n}_o = \boldsymbol{u}_p = (1;-3) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = -4 - 3t; t \in R \end{array}$

2. Průsečík *S* přímky *p* s osou $o: x - 3y + 4 = 0$

$(4 + t) - 3(-4 - 3t) + 4 = 0 \quad 4 + t + 12 + 9t + 4 = 0 \quad 10t = -20 \qquad t = -2$

Dopočteme souřadnice průsečíku S: $\begin{array}{l} x = 4 + t = 4 - 2 = 2 \\ y = -4 - 3t = -4 - 3(-2) = 2 \end{array} \Rightarrow S[2;2]$.

3. Na přímce *p* sestrojíme bod *B* tak, aby bod *S* byl středem úsečky *AB*.

Platí: $B = S + (S - A) \quad S - A = (-2;6) \qquad B = S + (S - A) = [2;2] + (-2;6) = [0;8]$

1. podmínka: Střed úsečky AB leží na ose $o: x - 3y + 4 = 0$.

Střed úsečky AB: $S\left[\frac{4 + b_1}{2}; \frac{-4 + b_2}{2}\right]$. Do rovnice osy o: $\left(\frac{4 + b_1}{2}\right) - 3\left(\frac{-4 + b_2}{2}\right) + 4 = 0$.

2. podmínka: Vektor *AB* je kolmý na osu *o*.

$B - A = (b_1 - 4; b_2 + 4) \qquad \boldsymbol{n}_o = (1;-3) \Rightarrow \boldsymbol{u}_o = (3;1)$

$\boldsymbol{u}_o(B - A) = 0 \Rightarrow (3;1)(b_1 - 4; b_2 + 4) = 3(b_1 - 4) + 1(b_2 + 4) = 0$

$\left(\frac{4 + b_1}{2}\right) - 3\left(\frac{-4 + b_2}{2}\right) + 4 = 0 \quad / \cdot 2 \qquad 3(b_1 - 4) + 1(b_2 + 4) = 0$

$b_1 - 3b_2 = -24 \qquad 3b_1 + b_2 = 8$

Vyřešíme soustavu dosazovací metodou: $b_1 - 3b_2 = -24 \Rightarrow b_1 = 3b_2 - 24$

$3(3b_2 - 24) + b_2 = 8 \qquad 9b_2 - 72 + b_2 = 8 \qquad 10b_2 = 80$

$b_2 = 8 \qquad b_1 = 3b_2 - 24 = 3 \cdot 8 - 24 = 0$

Př. 3: Na přímce $p: 3x - 4y - 2 = 0$ najdi body, jejichž vzdálenost od bodu $S[2;1]$ je 5.

- **Bod $X[x;y]$ leží na přímce *p*:** $3x - 4y - 2 = 0$.
- **Vzdálenost bodu $X[x;y]$ od bodu $S[2;1]$ je pět:** $|SX| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 5 \quad /^2$.

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \qquad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25 \quad x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$

Řešíme soustavu: $\begin{array}{c} 3x - 4y - 2 = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20 \end{array} \Rightarrow \quad 3x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4y + 2}{3}$

$\left(\frac{4y + 2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4y + 2}{3}\right) + y^2 - 2y = 20 \quad / \cdot 9$

$25y^2 - 50y - 200 = 0 \qquad y^2 - 2y - 8 = 0 \qquad (y - 4)(y + 2) = 0$

$y_1 = 4 \Rightarrow X_1[6;4] \qquad y_2 = -2 \Rightarrow X_2[-2;-2]$

Př. 4: Najdi bod tak, aby byl trojúhelník *ABC* pravoúhlý s přeponou *AB*, kde $A[-3;2], B[7;-3]$, a aby platilo $|AC| = 5$.

1. Úhel ACB **je pravoúhlý** $\Rightarrow$ vektory $C-A$ a $C-B$ jsou kolmé $\Rightarrow$

$C-A=(x+3;y-2)$ $\qquad$ $C-B=(x-7;y+3)$

$(C-A)\cdot(C-B)=(x+3;y-2)(x-7;y+3)=0$ $\qquad$ $x^2+y^2-4x+y-27=0$

2. strana AC **má délku 5** $|AC|=\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}=5$

$x^2+y^2+6x-4y-12=0$

Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{r} x^2+y^2-4x+y-27=0 \\ x^2+y^2+6x-4y-12=0 \\ \hline \end{array}$.

$$\begin{array}{lr} & x^2+y^2-4x+y-27=0 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & -10x+5y-15=0 \quad /:5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow -2x+y=3 \Rightarrow y=2x+3$$

Dosadíme do první rovnice: $\left(\frac{15-5y}{2}\right)^2+y^2-4\cdot\frac{15-5y}{2}+y-27=0$

$x^2+(2x+3)^2-4x+(2x+3)-27=0$ $\qquad$ $x^2+2x-3=0$ $\qquad$ $(x+3)(x-1)=0$

$x_1=-3 \Rightarrow y=2x+3=2(-3)+3=-3 \Rightarrow C[-3;-3]$

$x_2=1 \Rightarrow y=2x+3=2\cdot1+3=5 \Rightarrow C[1;5]$

Př. 5: Najdi vrcholy trojúhelníka *ABC*, pokud známe: obecné rovnice dvou stran $b: x-2y+7=0$ a $c: x+y+1=0$ a velikosti výšek $v_b=\frac{21\sqrt{5}}{5}$, $v_c=3\sqrt{2}$.

Hledání bodu *A* jako průsečíku přímek *b* a *c* Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{r} x-2y+7=0 \\ x+y+1=0 \\ \hline \end{array}$.

$[\![2]\!]-[\![1]\!]$ $\quad 3y-6=0 \Rightarrow y=2$ Dopočteme: $x+2+1=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow A[-3;2]$.

Určujeme bod $B[b_1;b_2]$**.** Leží na přímce *c*: $b_1+b_2+1=0 \Rightarrow b_1=-1-b_2$.

Vzdálenost bodu $B[b_1;b_2]$ od přímky *b* se rovná $\frac{21\sqrt{5}}{5}$: $\frac{|b_1-2b_2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{21\sqrt{5}}{5}$.

$|b_2-2|=7 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 7 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $b_2=9 \Rightarrow b_1=-1-b_2=-1-9=-10 \Rightarrow B_1[-10;9]$
- $b_2=-5 \Rightarrow b_1=-1-b_2=-1-(-5)=4 \Rightarrow B_2[4;-5]$

Určujeme bod $C[c_1;c_2]$ Leží na přímce *b*: $c_1-2c_2+7=0 \Rightarrow c_1=2c_2-7$ **.**

Vzdálenost bodu $C[c_1;c_2]$ od přímky *c* se rovná $3\sqrt{2}$: $\frac{|c_1+c_2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$.

$|c_2-2|=2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 2 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $c_2=4 \Rightarrow c_1=2c_2-7=2\cdot4-7=1 \Rightarrow C_1[1;4]$
- $c_2=0 \Rightarrow c_1=2c_2-7=2\cdot0-7=-7 \Rightarrow C_2[0;-7]$

$A[-3;2]$, $B_1[-10;9]$, $B_2[4;-5]$, $C_1[1;4]$, $C_2[0;-7]$. Příklad má tedy $1\cdot2\cdot2=4$ řešení.