7.2.2 Sčítání vektorů

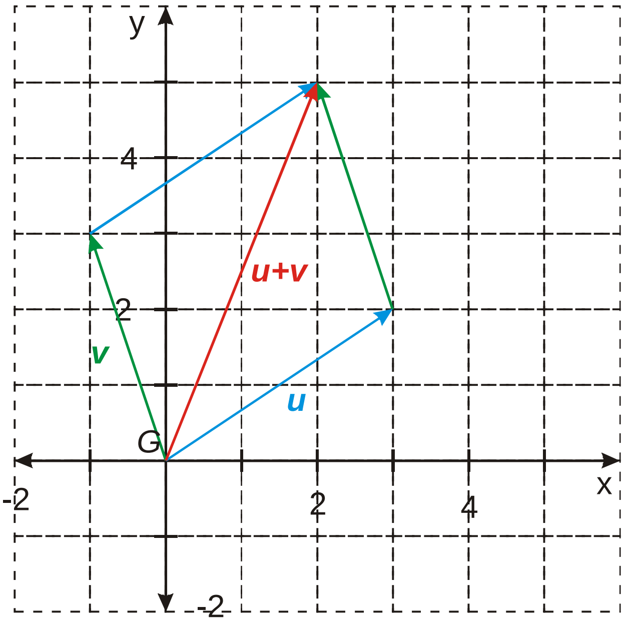
Předpoklady: 7201

Pedagogická poznámka: Studenti většinou necítí potřebu postupovat při definici sčítání vektorů (obecně při zavádění jakékoliv operace) tak striktně, jak vyžaduje matematika. Upozorňuji je tedy na začátku hodiny, že se jim bude opatrnost matematiků zdát přehnaná, ale že tímto způsobem se v matematice zkrátka pracuje.

Máme už zavedenou množinu vektorů, teď potřebujeme nějaké operace. (stejně jsme si v prvním ročníků zavedli množinu racionálních čísel a pak si pro ni zadefinovali sčítání zlomků)

Sčítání vektorů
známe z fyziky, pomocí rovnoběžníku sil nebo skládáním vektorů za sebe

Př. 1: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (3;2)$ a $\boldsymbol{v} = (-1;3)$. Zakresli oba vektory a urči graficky jejich součet (vektor $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$). Najdi vztah, který by umožnil určit jejich součet početně pomocí souřadnic.



Souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$: $(2;5)$

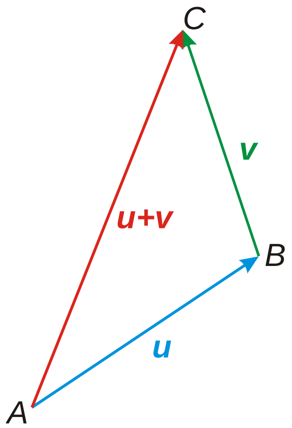
Zdá se, že platí: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u_1;u_2)+(v_1;v_2) = (u_1+v_1;u_2+v_2)$

Ověříme vztah pro naše vektory: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (3;2)+(-1;3) = (3+[-1];2+3) = (2;5)$

Pedagogická poznámka: Zápisy $(u_1;u_2)+(v_1;v_2) = (u_1+v_1;u_2+v_2)$ používám schválně. Snažím se tím posilovat vnímání vektorů jako uspořádaných dvojic čísel., slabší studenti mají tendenci obě složky separovat a vnímat zvlášť.

Trochu exaktněji:

Součet vektorů $\boldsymbol{u} = B - A$ a $\boldsymbol{v} = C - B$ je vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = C - A$.



Tato definice (v podstatě skládání vektorů za sebe) platí vždy, neboť pro každý vektor ***v*** můžeme zvolit takové umístění, aby konečný bod vektoru ***u*** byl počátečním bodem vektoru ***v***.

Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$ platí
$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1; u_2) + (v_1; v_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$.
Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ platí
$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1; u_2; u_3) + (v_1; v_2; v_3) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$.

Př. 2: (BONUS) Dokaž pomocí souřadnic bodů předchozí tvrzení pro souřadnice součtu vektorů.

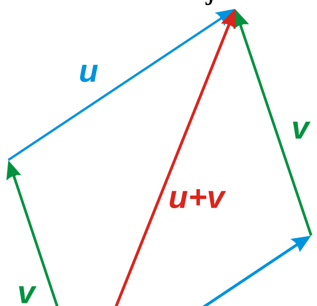
Stačí pro jednu ze souřadnic:
$\boldsymbol{u} = B - A \Rightarrow u_1 = b_1 - a_1$ $\qquad$ $\boldsymbol{v} = C - B \Rightarrow v_1 = c_1 - b_1$
$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = C - A \Rightarrow w_1 = c_1 - a_1 = c_1 - b_1 + b_1 - a_1 = v_1 + u_1$

Jaké má sčítání vektorů vlastnosti?

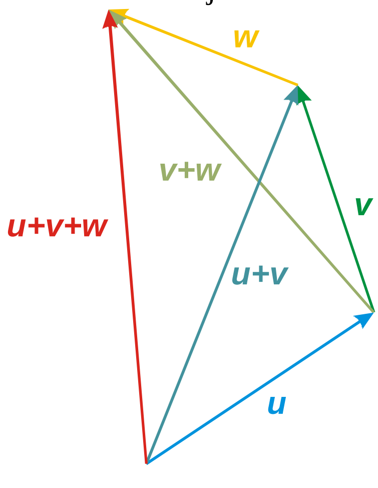
- je komutativní $\Rightarrow$ pro každé dva vektory ***u***, ***v*** platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
- je asociativní $\Rightarrow$ pro každé tři vektory ***u***, ***v***, ***w*** platí $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

Obojí je možné dokázat ze souřadnic i obrázkem.

Sčítání vektorů je komutativní



Sčítání vektorů je asociativní



Vektor určený nulovou orientovanou úsečkou se nazývá **nulový vektor** a označuje se $\boldsymbol{o}$.

Jeli $\boldsymbol{u} = B - A$, nazývá se vektor $A - B$ opačný vektor k vektoru $\boldsymbol{u}$ a označuje se $-\mathbf{u}$.

Př. 3: Doplň následující věty:
a) Pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} =$
b) Pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ platí $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) =$

a) Pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}$
b) Pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ platí $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$

Př. 4: Urči v rovině souřadnice vektorů:
a) $\boldsymbol{o}$ b) $-\boldsymbol{u}$ (pokud platí $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$)

a) $\boldsymbol{o} = (0;0)$
b) $-\boldsymbol{u} = (-u_1; -u_2)$ (pokud platí $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$)

Podobně v prostoru:
$\boldsymbol{o} = (0;0;0)$
$-\boldsymbol{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$ (pokud platí $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$)

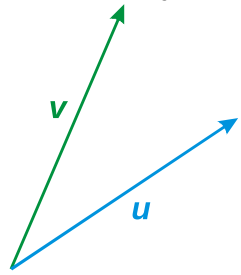
Stejně jako při sčítání čísel platí: $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$.

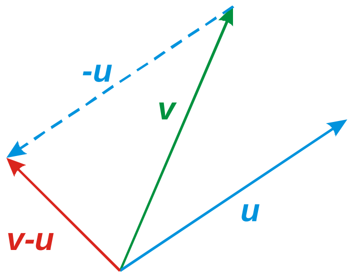
Př. 5: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (-1;2;3)$ a $\boldsymbol{v} = (3;-2;2)$. Vypočti jejich součet a rozdíly.

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-1;2;3) + (3;-2;2) = (-1+3; 2+[-2]; 3+2) = (2;0;5)$
$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (-1;2;3) - (3;-2;2) = (-1-3; 2-[-2]; 3-2) = (-4;4;1)$
$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = (3;-2;2) - (-1;2;3) = (3-[-1]; -2-2; 2-3) = (4;-4;-1)$
Podle očekávání jsou vektory $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ navzájem opačné.

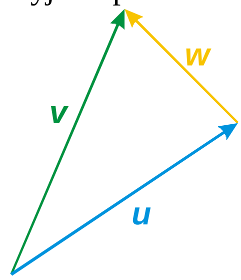
Pedagogická poznámka: Pokud se studenti snaží zkrátit zápis doporučuji jim opět $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = (3;-2;2) - (-1;2;3) = (4;-4;-1)$. Odečítání jednotlivých složek zvládnou snadno z paměti a budou mít lepší přehled o tom, jak k sobě souřadnice patří.

Př. 6: Na obrázku jsou nakresleny vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Nakresli do obrázku vektor $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$.





Př. 7: Vyjádři pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ vektor $\boldsymbol{w}$. Výsledek zdůvodni.

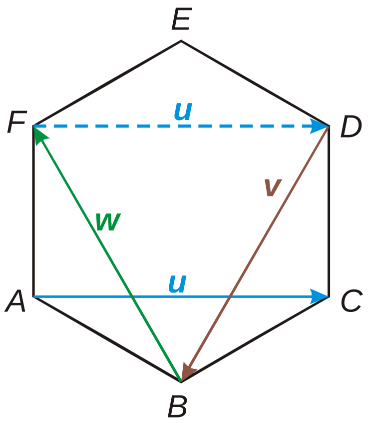


Porovnáním s předchozím obrázkem vidíme, že platí $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$.
Důvody:

- vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{w}$ tvoří rovnoběžník sil s výslednicí $\boldsymbol{v}$.
- výraz $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ můžeme upravit na $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$.
- z obrázku je vidět, že vektor $\boldsymbol{w}$ má i význam změny vektoru $\boldsymbol{u}$ na vektor $\boldsymbol{v}$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti nakreslí vektor $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ ihned způsobem použitým v příkladě 7, pro ně nemá tento příklad valný význam. Je jich však minimum. Předchozí dva příklady považuji za užitečné. Studenti se s nimi často setkávají, ale mnohdy jim nejsou příliš jasné.

Př. 8: Je dán pravidelný šestiúhelník *ABCDEF*. Označ $\boldsymbol{u} = C - A$, $\boldsymbol{v} = B - D$ a $\boldsymbol{w} = F - B$. Urči vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.



Z obrázku je zřejmé, že jiným možným umístěním vektoru $\boldsymbol{u}$ je orientovaná úsečka $\boldsymbol{FD}$
$\Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$

Pedagogická poznámka: Největší problém dělá studentům při řešení příkladu správné vyznačení směru vektorů (kreslí šipky obráceně).

Př. 9: Petáková:
strana 100/cvičení 13
strana 101/cvičení 22

Shrnutí: Souřadnice součtu vektorů získáme jako součet souřadnic sčítaných vektorů.