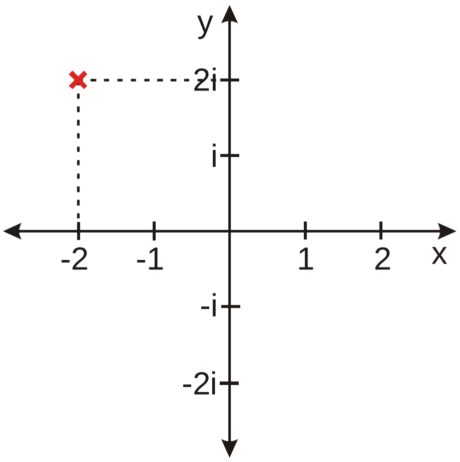
6.2.2 Goniometrický tvar komplexních čísel I

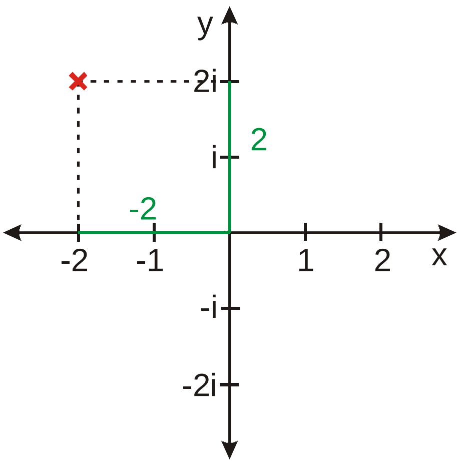
Předpoklady: 4207, 4209, 6201

Pedagogická poznámka: Goniometrický tvar komplexních čísel není pro studenti nijak obtížný. Velmi obtížné je pro studenty si po roce vzpomenout na hodnoty goniometrických funkcí. Varuji je dopředu a případnou neznalost trestám. Bez připomenutí hodnot goniometrických funkcí ztrácí následující hodiny smysl, protože studenti nebudou řešit problémy komplexních čísel, ale pouze hodnoty goniometrických funkcí.

Př. 1: Nakresli do Gaussovy roviny obraz čísla $z=-2+2i$.



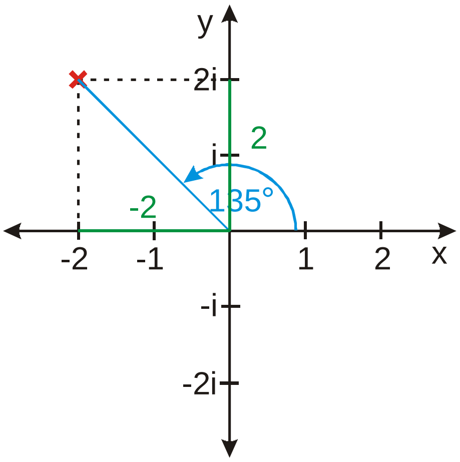
Obraz bodu $z=-2+2i$ je určen pomocí dvou čísel $[-2;2]$, kartézských souřadnic.
Jak kartézské souřadnice určují polohu bodu?
$[-2;2]$ = posuň se ve vodorovném směru (ve směru osy *x*) o dva zpátky (o –2) a pak se posuň ve svislém směru (ve směru osy *y*) od dva nahoru (o +2) a dostaneš se do bodu $[-2;2]$.



Je možné se do stejného místa dostat i jiným způsobem (předpokládáme, že stojíme v počátku a díváme se v kladném směru osy *x*?

Způsobů je nekonečně mnoho. Jiným jednoduchým je:

Otoč se o úhel $135°$, pak ujdi přímým směrem vzdálenost $\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



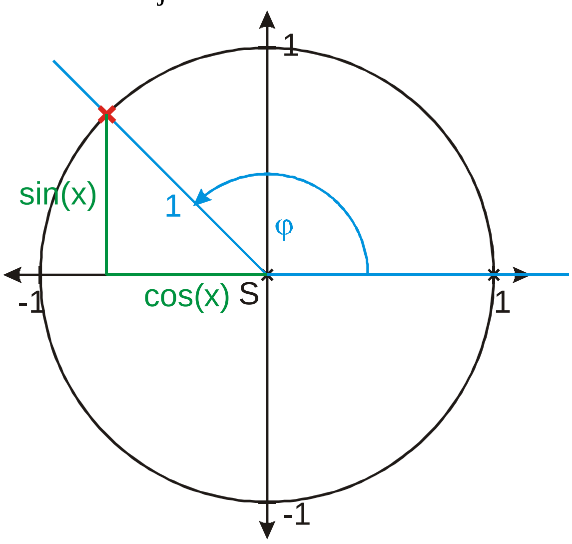
$\Rightarrow$ polohu obrazu čísla $z=-2+2i$ jde určit více způsoby:

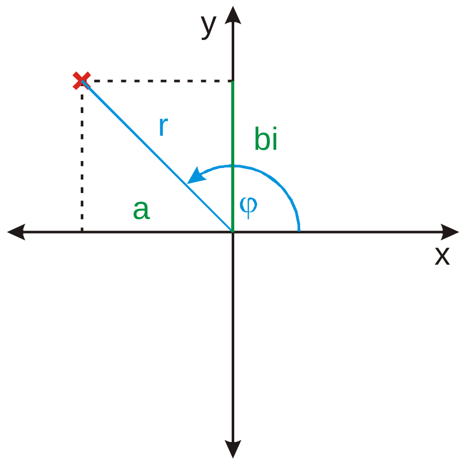
- pomocí čísel $[-2;2]$ - kartézské souřadnice
- pomocí čísel $\left[2\sqrt{2};135°\right]$ - polární souřadnice

Jak se říká polárním souřadnicím?

- $2\sqrt{2}$ - vzdálenost od počátku = **absolutní hodnota komplexního čísla** $|z|$ (značí se i r)
- $135°$ - úhel otočení od kladného směru osy x = **argument**, značí se φ

Jaký je vztah mezi $[a;b]$ a $[r;\varphi]$?
Srovnáme s jednotkovou kružnicí.





souřadnice zakresleného bodu mají hodnoty: $[\cos\varphi;\sin\varphi]$

stejný obrázek jako vlevo, ale vzdálenost bodu od počátku je r místo 1 $\Rightarrow$ souřadnice zakresleného bodu mají hodnoty: $[r\cos\varphi;r\sin\varphi]$. Dosud jsme je označovali $[a;b]$ $\Rightarrow$ platí:

$a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$

zapíšeme algebraický tvar komplexního čísla pomocí $[r;\varphi]$:

$z = a + bi = (r\cos\varphi) + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ = **goniometrický tvar komplexního čísla**

Goniometrický tvar není jednoznačný, obě goniometrické funkce se opakují po 2π, proto platí: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right]$

Goniometrickým tvarem čísla rozumíme jeho vyjádření ve tvaru $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde φ je argument komplexního čísla *z* a *r* je jeho absolutní hodnota.

Př. 2: Zapiš komplexní číslo $z = -2 + 2i$ v goniometrickém tvaru.

goniometrický tvar $\Rightarrow$ potřebujeme znát φ a *r*, obojí už známe z obrázků

$r = |z| = 2\sqrt{2}$

$\varphi = 135° = \frac{3}{4}\pi$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

Argument komplexních čísel se téměř výhradně udává v radiánech.

Jak převedeme číslo z goniometrického tvaru do algebraického?

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a + bi \Rightarrow$ stačí zapsat hodnoty goniometrických funkcí a roznásobit závorku

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -2 + 2i$$

Př. 3: Zapiš komplexní čísla v algebraickém tvaru:

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi$

c) $z_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

d) $z_4 = 4\left(\cos\frac{70}{3}\pi + i\sin\frac{70}{3}\pi\right)$

e) $z_5 = 5(\cos 40° + i\sin 40°)$

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$

b) $z_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

c) $z_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = z_3 = 2\left[0 + i(-1)\right] = -2i$

d) $z_4 = 4\left(\cos\frac{70}{3}\pi + i\sin\frac{70}{3}\pi\right)$

musíme najít základní hodnotu úhlu $\frac{70}{3}\pi = \frac{66}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 22\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$

$z_4 = 4\left(\cos\frac{70}{3}\pi + i\sin\frac{70}{3}\pi\right) = 4\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = 4\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -2 - i2\sqrt{3}$

e) $z_5 = 5(\cos 40° + i\sin 40°)$

pro úhel $40°$ neznám tabulkové hodnoty goniometrických funkcí $\Rightarrow$ s kalkulačkou jen přibližný výsledek

$z_5 = 5(\cos 40° + i\sin 40°) \doteq 5(0,77 + i\cdot 0,64) = 3,85 + 3,2i$

Př. 4: Petáková:
strana 137/cvičení 32 z_4
strana 137/cvičení 33

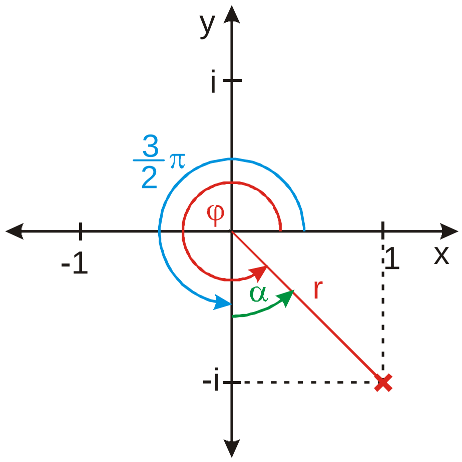
Na druhou stranu to bude horší.

Chceme převést do goniometrického tvaru $z = 1 - i$ $\Rightarrow$ musíme najít r a φ.

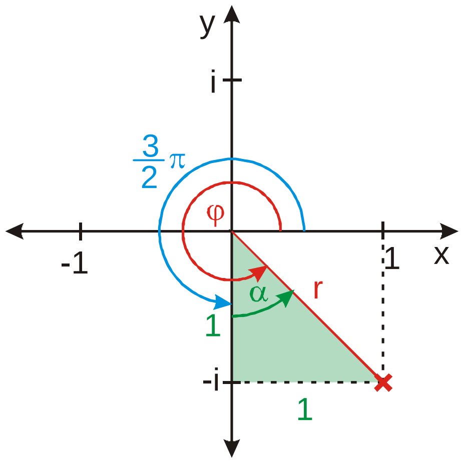
Najít r není problém: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Jak najít φ?

1. pomocí obrázku



Stačí určit úhel α a máme i úhel φ.



Zelený trojúhelník: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\varphi = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

2. pomocí rovnic

Vezmeme algebraický tvar a budeme ho upravovat na goniometrický:

$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$

srovnáme s algebraickým tvarem: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\Rightarrow$ platí:

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|}$ $\qquad$ $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|}$

$\Rightarrow$ můžeme určit hodnoty sin a cos pro hledaný argument a z nich argument určit

$z = 1 - i$, $r = \sqrt{2}$ (už jsem spočítali)

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{7}{4}\pi$

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

Př. 5: Převeď do goniometrického tvaru čísla:

a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\qquad$ b) $z_2 = 2i$ $\qquad$ c) $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i$

d) $z_4 = -2$ $\qquad$ e) $z_5 = \pi$ $\qquad$ f) $z_6 = 2 - i2\sqrt{3}$

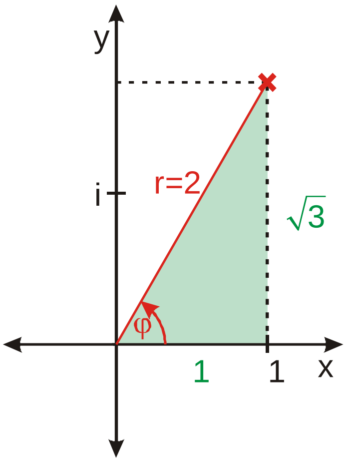
a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

1. pomocí obrázku

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$,

$\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

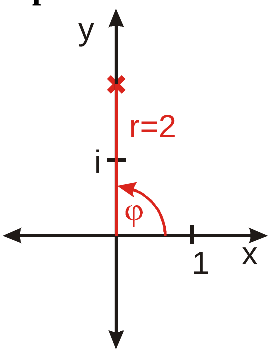
$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

Zelený trojúhelník: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

b) $z_2 = 2i \ \Rightarrow \ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + 2^2} = 2$

1. pomocí obrázku



$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$z = 2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{0}{2} = 0$

$\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{2}{2} = 1$

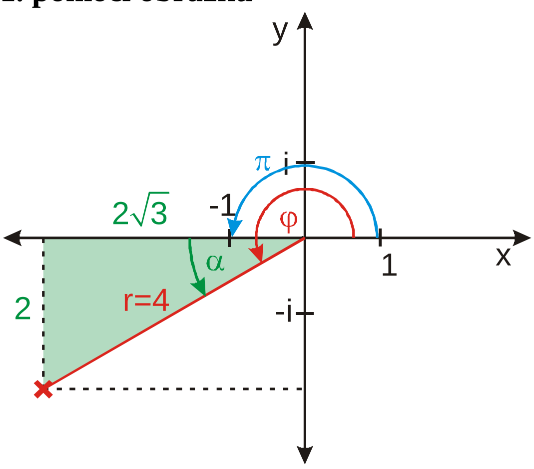
$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = 0$,

$\sin\varphi = 1 \Rightarrow \ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$z = 2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i \ \Rightarrow \ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4\cdot 3 + 4} = 4$

1. pomocí obrázku



2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí:

$\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \ \varphi = \dfrac{7}{6}\pi$

$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi + i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

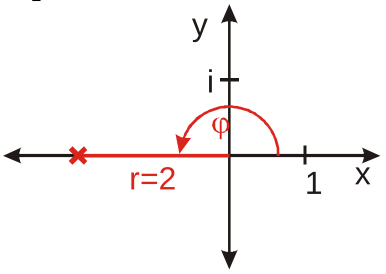
Zelený trojúhelník: $\sin\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$\varphi = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$

$$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

d) $z_4 = -2 \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$

1. pomocí obrázku



$\varphi = \pi$

$z = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-2}{2} = -1$

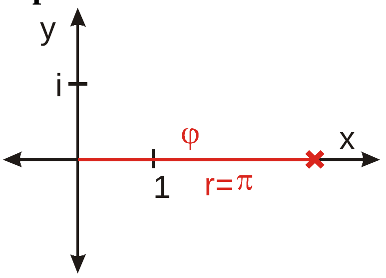
$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{0}{2} = 0$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \pi$

$z = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

e) $z_5 = \pi \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\pi^2+0^2} = \pi$

1. pomocí obrázku



$\varphi = 0$

$z = \pi = \pi(\cos 0 + i\sin 0)$

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\pi}{\pi} = 1$

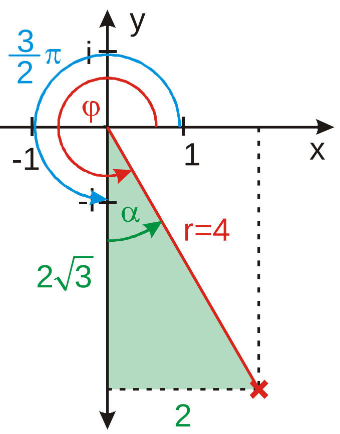
$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{0}{\pi} = 0$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 0$

$z = \pi = \pi(\cos 0 + i\sin 0)$

f) $z_6 = 2 - i2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+4\cdot 3} = 4$

1. pomocí obrázku



Zelený trojúhelník: $\sin\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = \frac{1}{2}$,

$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{5}{3}\pi$

$z = 2 - i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi + \alpha = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$z = 2 - i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je jednou z výjimek, kdy nechávám studenty, kteří ho nestihnou ve škole dopočítat zbytek doma. Jeho úspěšné zvládnutí je podmínkou příští hodiny.

Př. 6: Petáková:
strana 137/cvičení 30 z_4, z_6, z_7

Shrnutí: