

6.1.3 Umocňování komplexních čísel

Př. 1: Dopln následující větu: Pro libovolná komplexní čísla z, z_1, z_2 a všechna přirozená čísla n, m platí: $z^m \cdot z^n = , (z_1 \cdot z_2)^n = , (z^m)^n = .$

Př. 2: Dopln tabulku s mocninami imaginární jednotky i . Na základě druhého řádku tabulky zformuluj pravidlo pro co nejjednodušší výpočet libovolné přirozené mocniny i .

i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}	i^{13}
i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

- exponent dělitelný 4 $i^{4k} = 1$
- zbytek po dělení exponentu čtyřmi 1 $i^{4k+1} = i$
- zbytek po dělení exponentu čtyřmi 2 $i^{4k+2} = -1$
- zbytek po dělení exponentu čtyřmi 3 $i^{4k+3} = -i$

Předchozí pravidla se dají snadno dokázat: $i^{4k+1} = \underbrace{i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot \dots \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i}_{k \text{ skupin po čtyřech}} \cdot i = i$

Př. 3: Vypočti:

- a) i^{20} b) i^{41} c) i^{79} d) $i^3 + i^{13} + i^{33} + i^{23} + i^{43}$
 e) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}$

- a) $i^{20} = i^{4 \cdot 5} = 1$ b) $i^{41} = i^{4 \cdot 10 + 1} = i^{4 \cdot 10} \cdot i = i$ c) $i^{79} = i^{76} \cdot i^3 = -i$
 d) $i^3 + i^{13} + i^{33} + i^{23} + i^{43} = -i + i + i - i - i = -i$
 e) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50} = \underbrace{i + (-1) + (-i) + 1 + i + (-1) + \dots + i + (-1) + (-i) + 1 + i + (-1)}_0 = -1 + i$

Př. 4: Spočti: a) $(3 + 2i)^2$ b) $(2 - i)^3$ c) $(2 + i)^4$

- a) $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$
 b) $(2 - i)^3 = (2 - i)^2 (2 - i) = (4 - 4i + i^2)(2 - i) = (3 - 4i)(2 - i) = 6 - 3i - 8i + 4i^2 = 2 - 11i$
 c) $(2 + i)^4 = \left([2 + i]^2 \right)^2 = (4 + 4i + i^2)^2 = (3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i$

Postřeh: Umocňování komplexních čísel má oproti dvojčlenům jednu dobrou vlastnost. Vždy zbude jako výsledek jenom komplexní číslo (dvojčlen) \Rightarrow výraz se umocňováním nekomplikuje.

Př. 5: Vypočti $(1 + i)^{16}$. Než zahájíš výpočet, navrhní postup tak, aby byl výpočet co nejjednodušší.

$$(1 + i)^{16} = \left(\left([[1 + i]^2]^2 \right)^2 \right)^2 = \left(\left([(1 + 2i + i^2)^2]^2 \right)^2 \right)^2 = \left(\left([(2i)^2]^2 \right)^2 \right)^2 = \left([4i^2]^2 \right)^2 = \left([-4]^2 \right)^2 = (16)^2 = 256$$

Př. 6: Spočti:

a) $3(-1+i)(1-i) - i(2-3i)$

b) $[(1+2i)-(3-i)](1-i)^2$

c) $(2+3i)^2 - (2+3i)(3-2i) + 2(3-2i)$

a)

$$3(-1+i)(1-i) - i(2-3i) = 3(-1+i+i-i^2) - 2i + 3i^2 = 3[-1+2i-(-1)] - 2i + 3(-1) = 3(2i) - 2i - 3 = -3 + 4i$$

b)

$$[(1+2i)-(3-i)](1-i)^2 = (1+2i-3+i)(1-2i+i^2) = (3i-2)(1-2i-1) = (3i-2)(-2i) = -6i^2 + 4i = -6(-1) + 4i = 6 + 4i$$

c)

$$(2+3i)^2 - (2+3i)(3-2i) + 2(3-2i) = (4+12i+9i^2) - (6-4i+9i-6i^2) + 6-4i = 4+12i-9 - [6+5i-6(-1)] + 6-4i = 1+8i - (12+5i) = -11+3i$$

Př. 7: Najdi reálná čísla a, b taková, aby platilo: $(1-i)a - (-2+i)b = 5-2i$.

$$(1-i)a - (-2+i)b = 5-2i \quad \text{upravíme levou stranu}$$

$$a - ia + 2b - ib = 5 - 2i$$

Reálná čísla a, b nemohou nic změnit na tom, kde se vyskytují čísla $i \Rightarrow$ získáváme dvě rovnice:

- jednu pro členy bez i : $a + 2b = 5$,
- druhou pro členy s i : $-ia - ib = -2i$.

\Rightarrow Soustava dvou lineárních rovnic o dvou reálných neznámých (už umíme):

$$a + 2b = 5 \Rightarrow a = 5 - 2b$$

$$-ia - ib = -2i \quad / \cdot i$$

$$-i^2 a - i^2 b = -2i^2$$

$$a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b$$

Srovnáme obě rovnice: $5 - 2b = 2 - b$

$$b = 3$$

$$a = 2 - b = 2 - 3 = -1$$

$$a = -1 \quad b = 3$$

Př. 8: Petáková:

strana 135/cvičení 11 b) c)

strana 135/cvičení 12 c) e)

strana 135/cvičení 13 c)