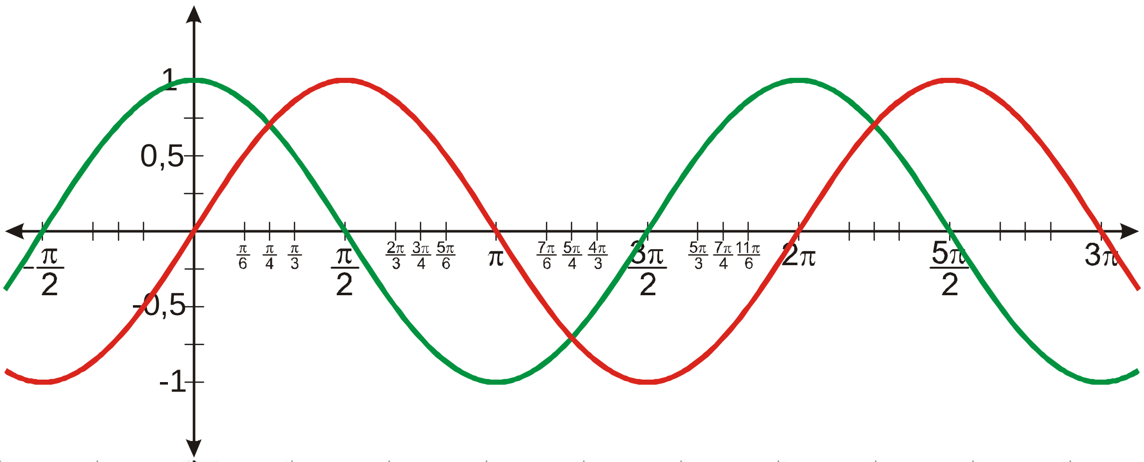
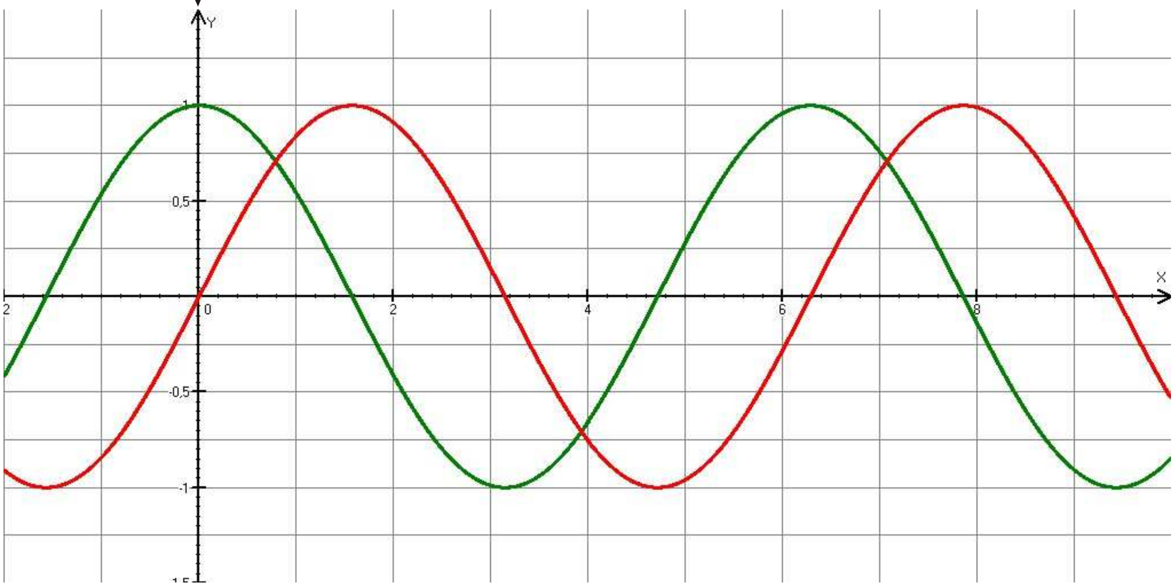
4.2.9 Vlastnosti funkcí sinus a cosinus

Předpoklady: 4208

Grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$, které jsme získali vynesením hodnot v minulé hodině.

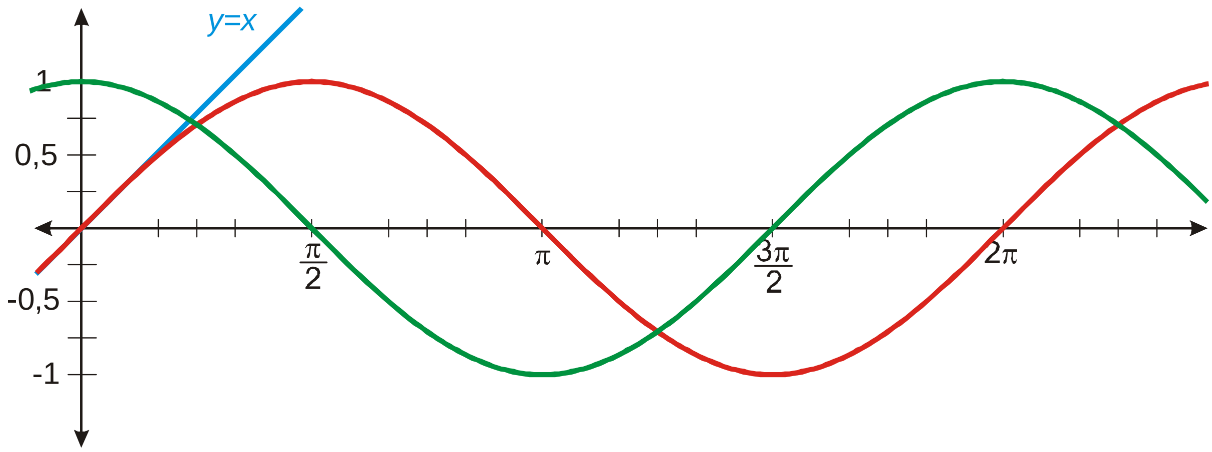




Obě křivky jsou stejné, jen kosinusoida je o $\frac{\pi}{2}$ napřed (nebo o $\frac{3}{2}\pi$ pozadu).

Tvar obou křivek závisí na měřítkách vodorovné a svislé osy. Jen málokdy mívají obě osy stejné měřítko. Často se používá zobrazení z našich grafů – vzdálenost 1 na ose *y* je stejně dlouhá jako vzdálenost $\frac{\pi}{2} \doteq 1,57$ na ose *x*.

Kdyby bylo měřítko u obou os stejné, byly by grafy nataženější ve vodorovném směru.



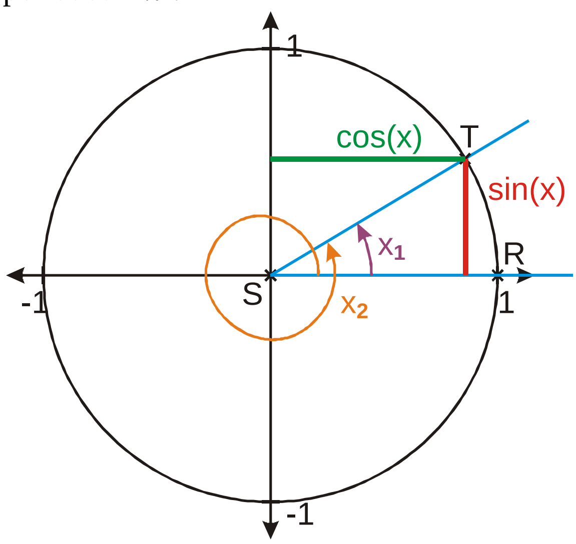
Funkce $y = \sin x$ se pro malá x chová velmi podobně jako funkce $y = x$ (na obrázku je nakreslena modře).

Vrátíme se k jednotkovým kružnicím.

Pedagogická poznámka: Většinu následujících příkladů by studenti daleko snáze řešili pomocí grafů. Není to matematicky tak hezké (je lepší vycházet z definice) a hlavně to není příliš přínosné. Práce s jednotkovou kružnicí je pro studenty obtížnější a následující příklady jsou další příležitostí k procvičování.
Většina chyb pramení ze špatné představy o orientovaném úhlu. Pokud se studenty řešíte problémy, nechte si od nich odpovídající úhly ukázat.

Př. 1: Rozhodni na základě definice goniometrických funkcí v jednotkové kružnici, zda jsou funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ periodické. Pokud ano, urči jejich nejmenší periodu.

Z definice je zřejmé, že hodnoty obou funkcí budou stejné, pokud je budeme určovat jakou souřadnice stejného bodu na jednotkové kružnici.
Počáteční rameno přejde do stejného koncového ramene pro různé velikosti jednoho úhlu $\Rightarrow$ hodnoty funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou stejné pro všechny velikosti jednoho úhlu $\Rightarrow$ velikosti se liší o násobky 2π $\Rightarrow$ funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou periodické s nejmenší periodou 2π.



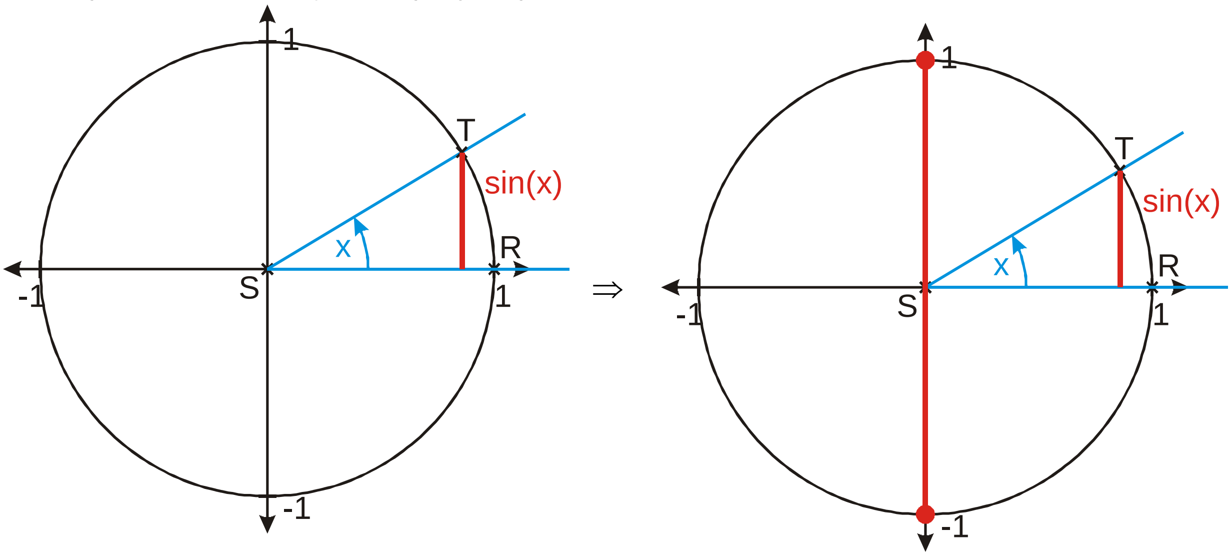
Pro každé $k \in Z$ a každé $x \in R$ platí: $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$,
$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$.

$\Rightarrow$ Stačí sledovat obě funkce na intervalu $\langle 0; 2\pi)$ a dozvíme se všechno.

Pedagogická poznámka: Při zápisu modrého rámečku je nutné zkontrolovat, zda studenti rozumí zápisu $x + k \cdot 2\pi, k \in Z$. Je to poprvé, co se s ním setkávají.

Př. 2: Na základě definice goniometrických funkcí v jednotkové kružnici rozhodni:
a) Je funkce $y = \sin x$ shora (zdola) omezená?
b) Má funkce $y = \sin x$ maximum (minimum)? Pokud ano, ve kterých bodech?
c) Urči obor hodnot funkce $y = \sin x$.

Funkce $y = \sin x$ je definována jako *y*-ová souřadnice bodu na jednotkové kružnici $\Rightarrow$ možné hodnoty funkce se rovnají možným *y*-ovým souřadnicím.

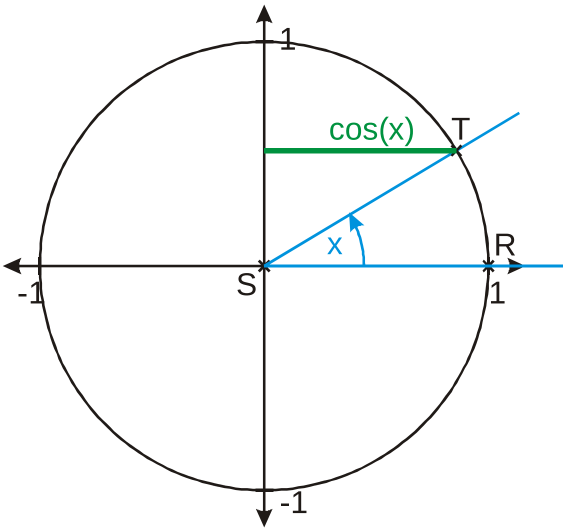


Pomocí pravého obrázku můžeme odpovědět na všechny otázky:
- Funkce $y = \sin x$ je omezená shora i zdola.
- Funkce $y = \sin x$ má maximum 1 pro $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$.

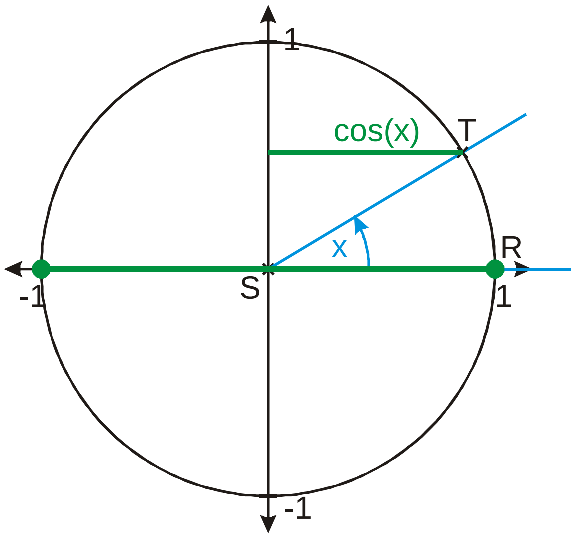
  Funkce $y = \sin x$ má minimum -1 pro $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.
- $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$

Př. 3: Na základě definice goniometrických funkcí v jednotkové kružnici rozhodni:
a) Je funkce $y = \cos x$ shora (zdola) omezená?
b) Má funkce $y = \cos x$ maximum (minimum)? Pokud ano, ve kterých bodech?
c) Urči obor hodnot funkce $y = \cos x$.

Funkce $y = \cos x$ je definována jako *x*-ová souřadnice bodu na jednotkové kružnici $\Rightarrow$ možné hodnoty funkce se rovnají možným *x*-ovým souřadnicím.



$\Rightarrow$

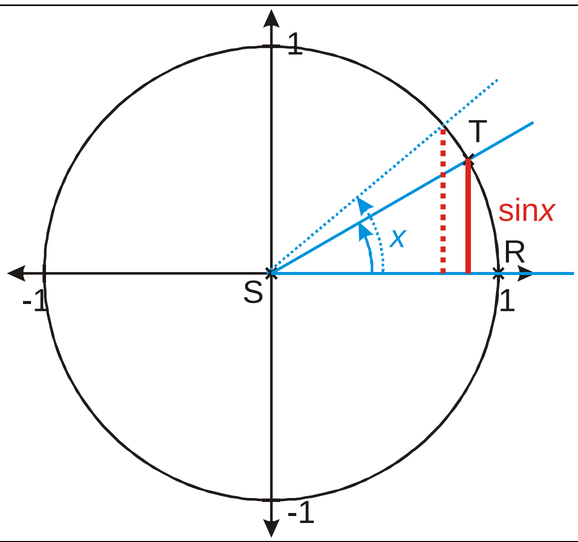


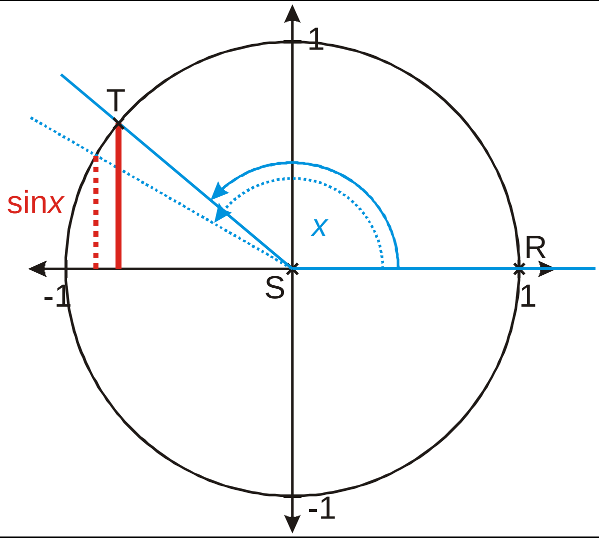
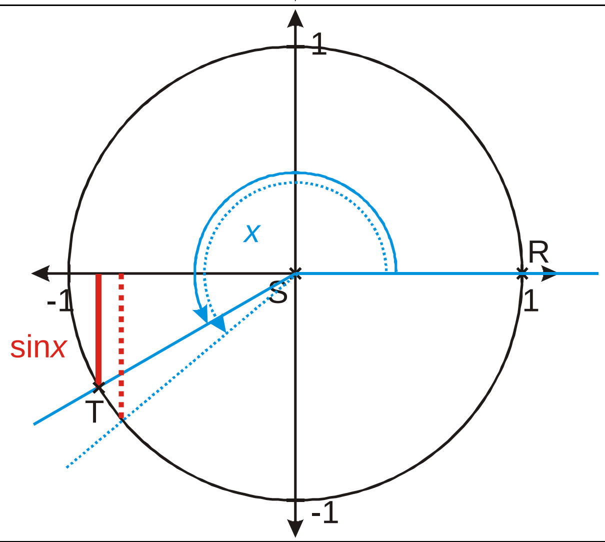
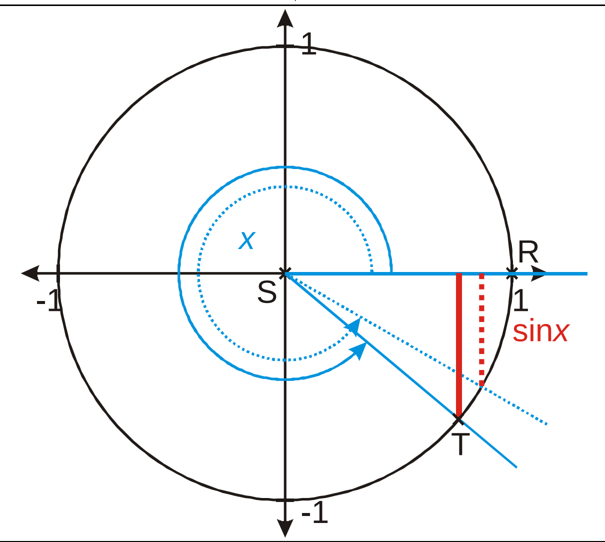
Z pravého obrázku můžeme odpovědět na všechny otázky:

- Funkce $y = \cos x$ je omezená shora i zdola.
- Funkce $y = \cos x$ má maximum 1 pro $x = 0 + k \cdot 2\pi$.
  Funkce $y = \cos x$ má minimum -1 pro $x = \pi + k \cdot 2\pi$.
- $H(f) = \langle -1;1 \rangle$.

Př. 4: Na základě definice goniometrických funkcí v jednotkové kružnici doplň následující tabulku pro funkci sinus:

Interval	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
Znaménko funkčních hodnot				
Monotónnost				

Interval $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$		Hodnoty jsou kladné a zvětšují se.

Interval $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$		Hodnoty jsou kladné a zmenšují se.
Interval $\left(\pi;\dfrac{3}{2}\pi\right)$		Hodnoty jsou záporné a zmenšují se.
Interval $\left(\dfrac{3}{2}\pi;2\pi\right)$		Hodnoty jsou záporné a zvětšují se.

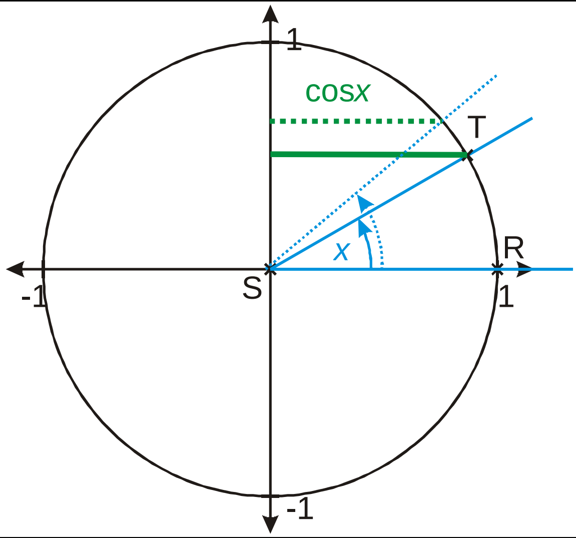
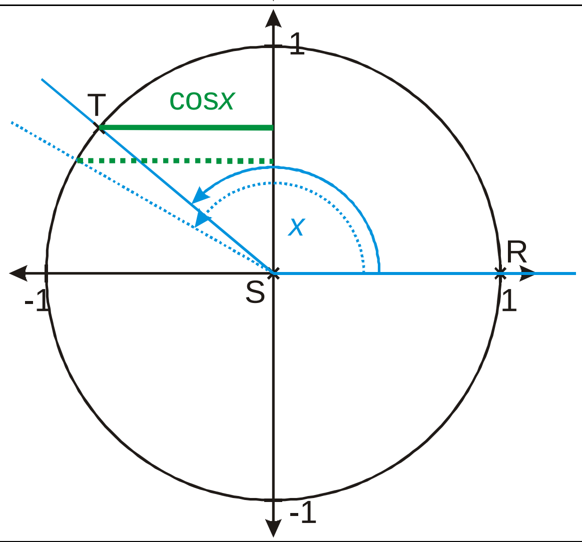
Vlastnosti funkce $y=\sin x$ **:**

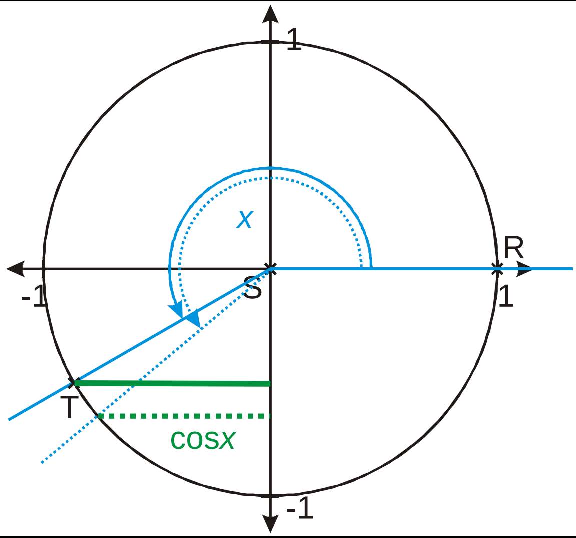
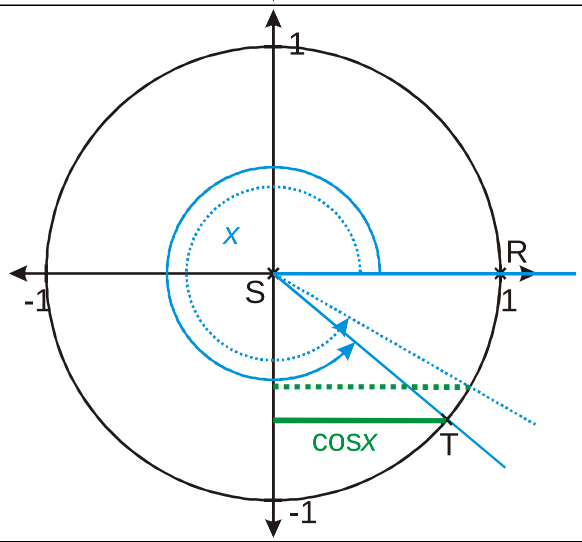
Interval	$\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\dfrac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\dfrac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
Znaménko funkčních hodnot	+	+	-	-
Monotónnost	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí

Pedagogická poznámka: Obrázky u předchozího a následujícího příkladu nemá cenu promítat. Daleko užitečnější je ukázat studentům dynamický model nebo točit ukazovátkem na tabuli.

Př. 5: Na základě definice goniometrických funkcí v jednotkové kružnici doplň následující tabulku pro funkci cosinus:

Interval	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
Znaménko funkčních hodnot				
Monotónnost				

Interval $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$		Hodnoty jsou kladné a zmenšují se.
Interval $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$		Hodnoty jsou záporné a zmenšují se.

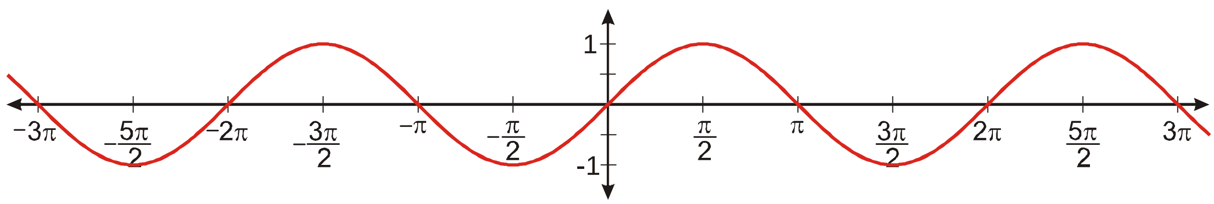
Interval $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$		Hodnoty jsou záporné a zvětšují se.
Interval $\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$		Hodnoty jsou kladné a zvětšují se.

Vlastnosti funkce $y=\cos x$**:**

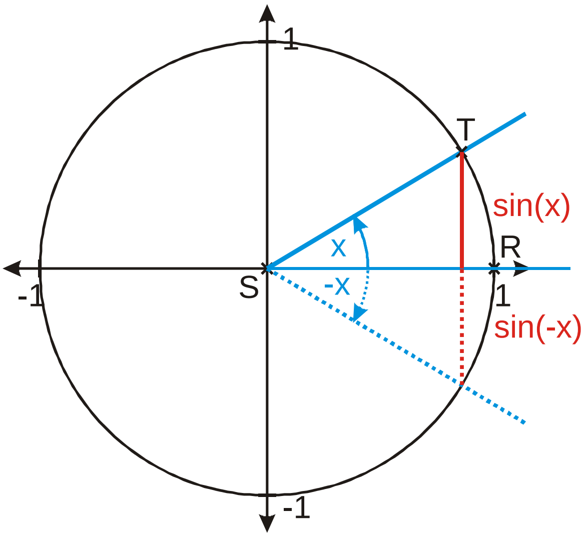
Interval	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
Znaménko funkčních hodnot	+	-	-	+
Monotónnost	klesající	klesající	rostoucí	rostoucí

Př. 6: Zkontroluj všechny nalezené vlastnosti pomocí grafů funkcí sinus a cosinus.

Př. 7: Nakresli graf funkce $y=\sin x$ pro $x\in\langle -3\pi;3\pi\rangle$ a s jeho pomocí rozhodni, zda je funkce $y=\sin x$ sudá nebo lichá. Odhad ověř pomocí definice v jednotkové kružnici.



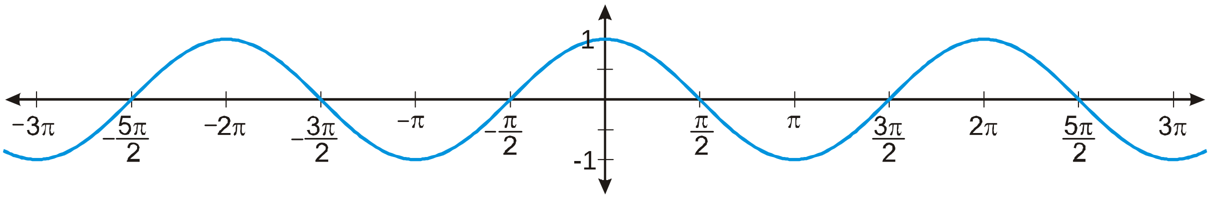
Graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic $\Rightarrow$ funkce $y = \sin x$ je lichá $\Rightarrow$ musí platit $\sin x = -\sin(-x)$.



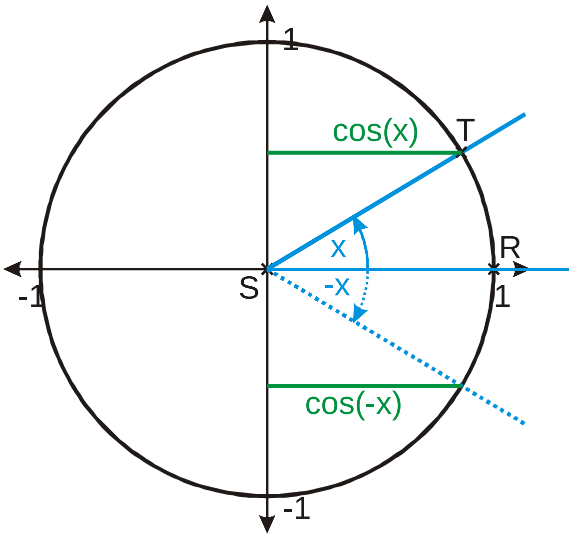
Z obrázku je vidět, že úhly *x* a –*x* jsou souměrné podle osy *x*, jejich *y*-ové souřadnice se liší pouze znaménkem $\Rightarrow$ platí $\sin x = -\sin(-x)$ $\Rightarrow$ **funkce** $y = \sin x$ **je lichá.**

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je první, ve kterém studenti kreslí sinus na delším úseku osy *x*, je proto třeba zkontrolovat, zda dodržují periodicitu a nezkracují nebo neprodlužují délky „vlnovek".

Př. 8: Nakresli graf funkce $y = \cos x$ pro $x \in \langle -3\pi; 3\pi \rangle$ a s jeho pomocí rozhodni, zda je funkce $y = \cos x$ sudá nebo lichá. Odhad ověř pomocí definice v jednotkové kružnici.

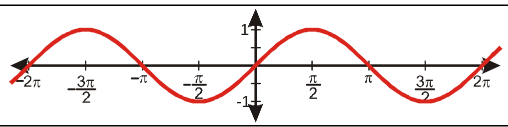
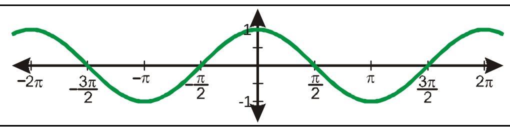


Graf funkce je souměrný podle osy *y* $\Rightarrow$ funkce $y = \cos x$ je sudá $\Rightarrow$ musí platit $\cos x = \cos(-x)$.



Z obrázku je vidět, že úhly *x* a –*x* jsou souměrné podle osy *x*, jejich *x*-ové souřadnice jsou stejné $\Rightarrow$ platí $\cos x = \cos(-x)$ $\Rightarrow$ **funkce** $y = \cos x$ **je sudá.**

Př. 9: V přehledné tabulce se dvěma sloupci shrň vlastnosti funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$.

<table>
<tr><td>$y = \sin x$</td><td>$y = \cos x$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$D(f) = R$</td></tr>
<tr><td colspan="2">periodická s nejmenší periodou 2π</td></tr>
<tr><td colspan="2">$H(f) = \langle -1;1 \rangle$</td></tr>
<tr><td colspan="2">shora i zdola omezená</td></tr>
<tr><td>maximum 1 v bodě $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$</td><td>maximum 1 v bodě $0 + k \cdot 2\pi$</td></tr>
<tr><td>minimum -1 v bodě $\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$</td><td>minimum -1 v bodě $\pi + k \cdot 2\pi$</td></tr>
<tr><td>lichá</td><td>sudá</td></tr>
<tr><td>rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right)$</td><td>rostoucí v $(\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi)$</td></tr>
<tr><td>klesající v $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right)$</td><td>klesající v $(0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi)$</td></tr>
<tr><td>kladné hodnoty pro $x \in (0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi)$</td><td>kladné hodnoty pro
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right)$</td></tr>
<tr><td>záporné hodnoty pro
$x \in (\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi)$</td><td>záporné hodnoty pro
$x \in \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right)$</td></tr>
</table>

Shrnutí: Vlastnosti funkcí sinus a cosinus snadno najdeme pomocí grafů nebo jednotkové kružnice.