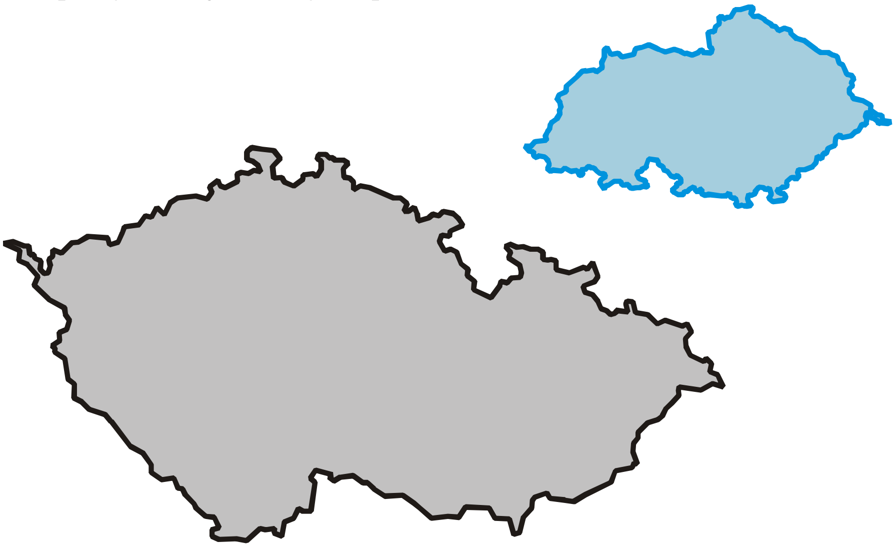
3.2.3 Podobnost trojúhelníků I

Předpoklady: 3201

Shodné útvary – je možné je přemístěním ztotožnit, lidově řečeno jsou „stejné“

Co splňují útvary, které jsou podobné?



Mají stejný tvar, ale různou velikost.
Kdybychom je chtěli ztotožnit, museli bychom je kromě přemístění i zvětšit (nebo zmenšit).

Kdy jsou podobné dvě úsečky?
Vždy, všechny úsečky mají stejný tvar, liší se pouze velikostí $\Rightarrow$ vždy y můžeme psát $|CD| = k|AB|$. k = koeficient podobnosti.

Př. 1: Urči koeficient podobnosti mezi úsečkami $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 9\,\text{cm}$.

Dosadíme do vztahu: $|CD| = k|AB| \Rightarrow k = \dfrac{|CD|}{|AB|} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.

Úsečka $|CD| = 9\,\text{cm}$ si je s úsečkou $|AB| = 6\,\text{cm}$ podobná s koeficientem $\dfrac{3}{2}$.

Kdy jsou si podobné dva trojúhelníky?
Jeden je zvětšení (nebo zmenšení) druhého $\Rightarrow$ všechny strany jednoho trojúhelníku jsou k krát větší (nebo menší) než odpovídající strany druhého.

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC, právě když existuje kladné číslo k takové, že pro jejich strany platí:

$$|A'B'| = k|AB|,\ |A'C'| = k|AC|,\ |B'C'| = k|BC|$$

neboli $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$.

Názvosloví:

$A'B'C' \sim ABC$ (**na pořadí vrcholů záleží**) – trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC

k = koeficient podobnosti trojúhelníků $A'B'C'$ a ABC

- $k > 1$ - zvětšení
- $k < 1$ - zmenšení
- $k = 1$ - trojúhelníky jsou shodné

Př. 2: Trojúhelník $A'B'C' \sim ABC$ s koeficientem podobnosti k. Urči koeficient podobnosti trojúhelníku ABC s trojúhelníkem $A'B'C'$.

Platí: $|A'B'| = k|AB| \Rightarrow |AB| = \frac{1}{k}|A'B'|$

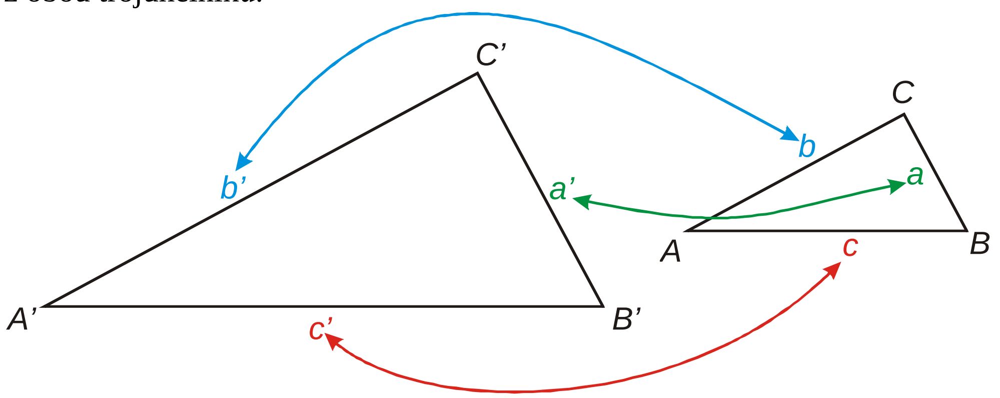
Trojúhelník ABC je s trojúhelníkem $A'B'C'$ podobný s koeficientem $\frac{1}{k}$.

Podobnost trojúhelníků můžeme vnímat i jako shodu ve tvaru. Čím je určen tvar trojúhelníka?

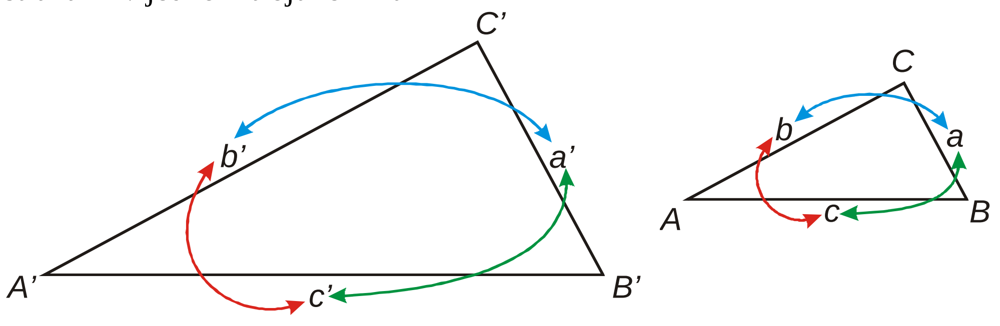
- vnitřními úhly
- vzájemným poměrem stran

Vyjdeme z rovností: $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ $\Rightarrow$ $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = k$ $\Rightarrow$ získáme tři rovnice:

$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$, $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$, $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ = v každém poměru, který vyjadřuje podobnost, vystupují strany z obou trojúhelníků:



Předchozí rovnosti můžeme upravit: $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} \Rightarrow \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$. Získáme tak jiné rovnosti: $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$, $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$, $\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ z poměrů mezi stranami různých trojúhelníků jsme získali poměry mezi stranami v jednom trojúhelníku



$\Rightarrow$ u jednoho z trojúhelníků nemusíme ani znát konkrétní délky stran, stačí jejich poměry a můžeme rozhodnout o podobnosti
nejčastěji zapisujeme v takto: $a':b':c' = a:b:c$

Věta o určení podobnosti trojúhelníků pomocí poměrů odpovídajících si stran je obdobou věty ***sss*** o shodnosti trojúhelníků.

Př. 3: Najdi odpovídající věty o podobnosti k větám o shodnosti ***sus, usu***.

Věta o shodnosti ***sus*** $\Rightarrow$ věta o podobnosti ***sus***: dva trojúhelníky se musí shodovat v poměrech dvou stran a v úhlu, který strany svírají (***su*** nestačí, jedna dvojic stran si je podobná vždy)
Věta o shodnosti ***usu*** $\Rightarrow$ věta o podobnosti ***uu***: dva trojúhelníky se musí shodovat ve dvou úhlech (třetí úhel je zbytek do $180°$ a tím je jasná podobnost, protože dva trojúhelníky, které se shodují ve třech úhlech mají stejný tvar a tím pádem jsou si podobné)

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny tvoří příklady na ověřování a výpočtu z podobností. Zejména u ověřování podobnosti je rychlost postupu studentů velmi rozdílná. U pomalejších studentů je důležité, aby měl dost času si příklad spočítat samostatně a tak si problém rozmysleli.

Př. 4: Které z následujících trojúhelníků jsou podobné s trojúhelníkem ABC, kde $a = 12$, $b = 15$ a $c = 18$
a) trojúhelník *KLM*: $k = 12$, $l = 10$, $m = 8$
b) trojúhelník *XYZ* o stranách $28; 24; 36$
c) trojúhelník *EFG*: $|EF| = 6$, $|EG| = 4$, $|FG| = 5$

V jednotlivých bodech si seřadíme strany podle velikosti a spočteme si poměry:
a) trojúhelník *KLM*: $k = 12$, $l = 10$, $m = 8$
strany podle velikosti: $8;10;12$
$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ trojúhelníky *ABC* a *MLK* jsou si podobné (pořadí vrcholů je důležité, abychom věděli, které vrcholy si navzájem odpovídají)

b) trojúhelník *XYZ* o stranách $28; 24; 36$
strany podle velikosti: $24; 28; 36$
$\frac{24}{12} = 2$, $\frac{28}{15} = 1,8\overline{6}$ $\Rightarrow$ nemá cenu počítat dál $\Rightarrow$ trojúhelníky *ABC* a *XYZ* si nejsou podobné

c) trojúhelník *EFG*: $|EF| = 6$, $|EG| = 4$, $|FG| = 5$
strany podle velikosti: $4; 5; 6$
$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné
$|EF| = g \sim c$, $|EG| = f \sim a$, $|FG| = e \sim b$ $\Rightarrow$ trojúhelníky *ABC* a *FEG* jsou si podobné (pořadí vrcholů je důležité, abychom věděli, které vrcholy si navzájem odpovídají)

Př. 5: Pro trojúhelníky platí $ABC \sim KLM$. Urči zbývající strany, pokud víme, že platí: $a=5$, $b=4$, $c=6$, $l=6$.

Nejdříve určíme koeficient podobnosti (označíme si ho *q*, aby se nám nepletl se stranou *k*):
$l = q \cdot b \Rightarrow q = \frac{l}{b} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
Teď můžeme dopočítat zbývající strany:
$k = q \cdot a = \frac{3}{2} \cdot 5 = 7,5$
$m = q \cdot c = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$
Strany trojúhelníka *KLM* mají délky $k = 7,5$, $l = 6$, $m = 9$.

Př. 6: Dva z vnitřních úhlů trojúhelníka *ABC* mají velikosti $47°$ a $56°$. Dva z vnitřních úhlů trojúhelníka *KLM* mají velikosti $77°$ a $56°$. Jsou si trojúhelníky podobné?

Dopočítáme třetí úhel u jednoho trojúhelníků:
trojúhelník *ABC*: $180° - (47° + 56°) = 77°$ $\Rightarrow$ trojúhelníky *ABC* a *KLM* se shodují ve dvou úhlech a jsou si podobné.

Př. 7: Pro poměr stran v trojúhelníku *ABC* platí $a:b:c = 6:5:4$. Které z uvedených trojúhelníků jsou s ním podobné?
a) $30;25;15$ b) $8;10;12$ c) $18;20;24$

a) $30;25;15$
strany podle velikosti: $30;25;20$
kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:
$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} = \frac{30}{25} \Rightarrow$ platí $\frac{a}{c} = \frac{6}{4} \neq \frac{30}{15} = \frac{2}{1} \Rightarrow$ neplatí $\Rightarrow$ trojúhelník není podobný s trojúhelníkem *ABC*
b) $8;10;12$
strany podle velikosti: $12;10;8$
kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:
$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} \Rightarrow$ platí $\frac{a}{c} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} \Rightarrow$ platí $\frac{b}{c} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow$ platí (bylo zřejmé dopředu) $\Rightarrow$ trojúhelník je podobný s trojúhelníkem *ABC*
c) $18;20;24$
strany podle velikosti: $24;20;18$
kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:
$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} = \frac{24}{20} \Rightarrow$ platí $\frac{a}{c} = \frac{6}{4} \neq \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ neplatí $\Rightarrow$ trojúhelník není podobný s trojúhelníkem *ABC*

Př. 8: Pro trojúhelníky platí $ABC \sim LKM$ s koeficientem podobnosti $q = 3$. Urči zbývající strany obou trojúhelníků, pokud víme, že platí: $a = 9$, $k = 4$, $m = 3$.

Známe koeficient podobnosti $\Rightarrow$ můžeme rovnou dopočítávat jednotlivé strany, ale musí dávat pozor, jak si strany odpovídají:

$a = q \cdot l \Rightarrow l = \frac{a}{q} = \frac{9}{3} = 3$

$b = q \cdot k = 3 \cdot 4 = 12$

$c = q \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$

Trojúhelník *ABC* má strany o velikosti $a = 9$, $b = 12$, $c = 9$, trojúhelník *KLM* má strany o velikosti $k = 4$, $l = 3$, $m = 3$.

Př. 9: Petáková:
strana 86/cvičení 21

Shrnutí: Podobné útvary mají stejný tvar, ale různou velikost.