2.9.9 Exponenciální nerovnice II

Předpoklady: 2908

Pedagogická poznámka: Všechny příklady v této hodině řeší studenti samostatně. Ti, kteří dokáží spočítat všechno, jsou odměněni plusem. Většinou není potřeba nikomu moc pomáhat, v první fázi se snažím, aby si studenti uvědomili, že i při řešení nerovnic mohou používat triky, které mají v arzenálu na řešení exponenciálních rovnic.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2^{x+2} \leq 6\sqrt{2} + 2^x$.

$2^{x+2} \leq 6\sqrt{2} + 2^x$

$2^x \cdot 2^2 \leq 6\sqrt{2} + 2^x$

Substituce: $2^x = a$

$a \cdot 4 \leq 6\sqrt{2} + a$

$4a \leq 6\sqrt{2} + a$

$3a \leq 6\sqrt{2}$

$a \leq 2\sqrt{2}$

Návrat k původní proměnné:

$2^x = a \leq 2\sqrt{2}$

$2^x \leq 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$

Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$x \leq \frac{3}{2}$ $\qquad K = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right\rangle$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{2^{x^2}}{2^{5x}} \leq \frac{1}{16}$.

$\frac{2^{x^2}}{2^{5x}} \leq \frac{1}{16}$

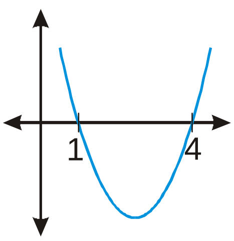
$2^{x^2-5x} \leq 2^{-4}$

Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$x^2 - 5x \leq -4$

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$(x-4)(x-1) \leq 0$ $\Rightarrow$ Nulové body grafu: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.



Hledáme části grafu pod osou x. $\Rightarrow$ $K = \langle 1, 4 \rangle$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\frac{4^x}{2^{5x}} \leq 16$.

$\frac{4^x}{2^{5x}} \leq 16$

$\left(\frac{2^2}{2^5}\right)^x \leq 16$

$\left(2^{-3}\right)^x \leq 16$

$2^{-3x} \leq 2^4$

Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$-3x \leq 4$

$x \geq -\frac{4}{3}$ $\qquad$ $K = \left\langle -\frac{4}{3}; \infty \right)$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $4^x + 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$.

$4^x + 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$

Nerovnice nemá řešení, všechny členy na levé straně jsou kladná čísla, jejich součet musí být větší než nula.

Pedagogická poznámka: Většina studentů řeší rovnici klasicky. Teprve ve chvíli, kdy dojdou k řešení, je vyzvu, aby si rozmysleli, zda nemohli k výsledku dojít rychleji.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $0,25^x - 0,5^x - 2 \leq 0$.

$0,25^x - 0,5^x - 2 \leq 0$

Protože platí: $0,25 = 0,5^2$ $\Rightarrow$ pokusíme se substituci $y = 0,5^x$.

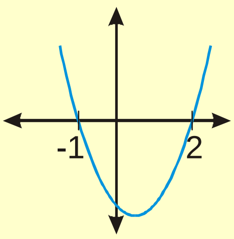
$\left(0,5^2\right)^x - 0,5^x - 2 \leq 0$

$\left(0,5^x\right)^2 - 0,5^x - 2 \leq 0$

Substituce: $y = 0,5^x$.

$y^2 - y - 2 \leq 0$

$(y-2)(y+1) \leq 0$ $\Rightarrow$ Nulové body grafu: $y_1 = -1$, $y_2 = 2$.



Hledáme části grafu pod osou *x*: $y \in \langle -1; 2 \rangle$.

Návrat k původní proměnné:

$0,5^x = y \in \langle -1; 2 \rangle$

Přepíšeme interval hodnot $0,5^x$ pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2">$0,5^x \in \langle -1; 2 \rangle \Leftrightarrow 0,5^x \geq -1$ a zároveň $0,5^x \leq 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou výsledek, získáme jako průnik jejich řešení</td></tr>
<tr><td>$0,5^x \geq -1$
Podmínka je splněna vždy, $0,5^x > 0$.
$K_1 = R$</td><td>$0,5^x \leq 2$
$0,5^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 0,5^{-1}$
Základ mocniny je menší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost mezi exponenty mocnin se obrací.
$x \geq -1$
$K_2 = \langle -1; \infty)$</td></tr>
</table>

Hledáme průnik množin $K_1 = R$ a $K_2 = \langle -1; \infty)$ $\Rightarrow$ $K = K_1 \cap K_2 = \langle -1; \infty)$

Pedagogická poznámka: Kritickým bodem předchozího příkladu je návrat ze substituce. Nejdříve poradím studentům pouze to, aby interval přepsali na nerovnice, s těmi, kterým pouhé přepsání do nerovnic nestačí, poté řešíme, jestli získáme výsledek jako průnik nebo sjednocení.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $3 \cdot 9^x - 3^{x+3} \geq 3^x - 9$.

Pokusíme se o substituci $y = 3^x$.

$$3 \cdot \left(3^2\right)^x - 3^3 \cdot 3^x \geq 3^x - 9$$

$$3 \cdot \left(3^x\right)^2 - 3^3 \cdot 3^x \geq 3^x - 9$$

Substituce: $y = 3^x$.

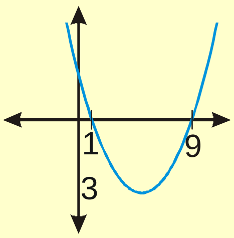
$$3y^2 - 27y \geq y - 9$$

$$3y^2 - 28y + 9 \geq 0$$

Hledáme nulové body grafu z kvadratické rovnice:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{28 \pm \sqrt{676}}{6} = \frac{28 \pm 26}{6}$$

$y_1 = \frac{28+26}{6} = 9$ $\quad$ $y_2 = \frac{28-26}{6} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Nulové body grafu: $y_1 = 9$, $y_2 = \frac{1}{3}$.



Hledáme části grafu nad osou x: $y \in \left(-\infty; \frac{1}{3} \right\rangle \cup \langle 9; \infty)$.

Návrat k původní proměnné:

$$3^x = y \in \left(-\infty; \frac{1}{3} \right\rangle \cup \langle 9; \infty)$$

Přepíšeme intervaly hodnot 3^x pomocí nerovnic:

$$3^x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 9;\infty) \Leftrightarrow 3^x \leq \frac{1}{3} \text{ nebo } 3^x \geq 9$$	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, stačí, když platí jedna z nich $\Rightarrow$ výsledek získáme jako sjednocení jejich řešení.	
$$3^x \leq \frac{1}{3}$$ $$3^x \leq 3^{-1}$$ Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin. $$x \leq -1$$ $$K_1 = (-\infty;-1\rangle$$	$$3^x \geq 9$$ $$3^x \geq 3^2$$ Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin. $$x \geq 2$$ $$K_2 = \langle 2;\infty)$$

Hledáme sjednocení množin $K_1 = (-\infty;-1\rangle$ a $K_2 = \langle 2;\infty)$.

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty;-1\rangle \cup \langle 2;\infty)$

Př. 7: Petáková:
strana 37/cvičení 28 c) d) e)

Shrnutí: Při návratu ze substituce je užitečné přepsat interval pomocí nerovnic.