2.3.10 Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých I

Předpoklady: 2308

Pedagogická poznámka: Hodina má trochu netradiční charakter. U každé metody si studenti opíší postup a pak ho zkusí uplatnit na stále stejnou soustavu rovnic.

Př. 1: Urči věk otce a věk syna, víš-li, že za 3 roky bude otec 5krát starší než syn a za 5 let bude otec 4krát starší než syn.

Sestavíme rovnice:
Dvě neznámé:

věk otce… x	věk otce za 3 roky… $x+3$	věk otce za 5 let… $x+5$
věk syna… y	věk syna za 3 roky… $y+3$	věk syna za 5 let… $y+5$

Za 3 roky bude otec 5krát starší než syn. $\Rightarrow$ $(x+3)=5(y+3)$

Za 5 let bude otec 4krát starší než syn. $\Rightarrow$ $(x+5)=4(y+5)$

Pedagogická poznámka: Při sestavování rovnic je opět největším problém ukvapený postup ústící do rovnic typu $x+3=5y+3$…

Upravíme rovnice:

$$(x+3)=5(y+3)$$
$$x+3=5y+15$$
$$x-5y=12$$

$$(x+5)=4(y+5)$$
$$x+5=4y+20$$
$$x-4y=15$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} x-5y&=12 \\ x-4y&=15 \end{aligned}$$ $\Rightarrow$ dvě možnosti volby a dvě omezující podmínky.

Soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých rozumíme soustavu rovnic, kterou lze zapsat ve tvaru:
$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1 \\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned}$$
, kde *x* a *y* jsou proměnné a $a_1;a_2;b_1;b_2;c_1;c_2$ koeficienty z *R*.
Řešení soustavy rovnic můžeme pojmout, jako řešení příkladu, ve kterém máme dvě možnosti volby (neznámé *x* a *y*) a dvě podmínky omezující tuto volbu.

Poznámka: Hlavně na vysokoškolské úrovni se používá častěji zápis: $\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2 \end{aligned}$.

Pedagogická poznámka: Následující metody znají studenti většinou ze základní školy, proto je možné po připomenutí principu nechat studenty počítat samostatně.

Existuje několik metod řešení naší soustavy.

Dosazovací metoda

1. Jednu z neznámých vyjádříme pomocí jedné z rovnic jako výraz.
2. Výraz dosadíme za neznámou do druhé rovnice $\Rightarrow$ získáme rovnici s jedinou neznámou.
3. Spočítáme rovnici a tím určíme hodnotu druhé neznáme.
4. Pomocí spočtené proměnné určíme hodnotu zbývající proměnné.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x-5y=12 \\ x-4y=15 \end{matrix}$ dosazovací metodou.

$x-5y=12 \Rightarrow x=12+5y$ (jednu z neznámých vyjádříme pomocí jedné z rovnic jako výraz)

$x-4y=15 \Rightarrow (12+5y)-4y=15$ (výraz dosadíme za neznámou do druhé rovnice)

$(12+5y)-4y=15$ (spočteme rovnici)

$12+5y-4y=15$

$y=3$

Hodnotu zbývající proměnné dopočteme z vyjádřeného výrazu.

$x=12+5y=12+5\cdot 3=27$ $K=[27;3]$

Otci je 27 let, synovi jsou tři roky.

Dodatek: První rovnici jsme vyjádřením neznámé nezapomněli, jen jsme ji trochu přeměnili a jakmile jsme chtěli dopočítat *x*, opět jsme ji použili.

Výsledek nezávisí na tom, kterou neznámou a ze které rovnice jsme vyjadřovali. Na této volbě může záviset délka a obtížnost výpočtu.
Vyřešíme soustavu vyjádřením *y* ze druhé rovnice:

$x-4y=15 \Rightarrow 4y=x-15 \Rightarrow y=\frac{x-15}{4}$ (jednu z neznámých vyjádříme pomocí jedné z rovnic jako výraz)

$x-5y=12 \Rightarrow x-5\frac{x-15}{4}=12$ (výraz dosadíme za neznámou do druhé rovnice)

$x-5\frac{x-15}{4}=12 \quad /\cdot 4$ (spočteme rovnici)

$4x-5x+75=48$

$x=27$

Hodnotu zbývající proměnné dopočteme z vyjádřeného výrazu.

$y=\frac{x-15}{4}=\frac{27-15}{4}=3$ $K=[27;3]$

$\Rightarrow$ Pokud se rozhodneme pro dosazovací metodu, je dobré si rozmyslet jakou neznámou a z jaké rovnice budeme vyjadřovat.

Pedagogická poznámka: Při dalších příkladech na dosazovací metodu, vždycky diskutujeme o výhodnosti jednotlivých postupů.

Poznámka: Dosazovací metodu už jsme fakticky používali při řešení slovních úloh, kdy jsme si na začátku zvolili více neznámých a pak jsme jejich počet postupných dosazováním a vyjadřováním snižovali.

Srovnávací metoda

1. Z obou rovnic vyjádříme jednu z neznámých.
2. Z vzniklých výrazů sestavíme novou rovnici (oba se rovnají stejnému číslu – neznámé).
3. Spočítáme rovnici.
4. Pomocí spočtené neznámé určíme hodnotu druhé neznámé.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x-5y=12 \\ x-4y=15 \end{matrix}$ srovnávací metodou.

$x-5y=12$
$x-4y=15$

V obou rovnicích se vyskytuje samotné x, necháme ho na jedné straně, zbytek rovnic převedeme na druhou stranu.

$x-5y=12 \Rightarrow x=12+5y$
$x-4y=15 \Rightarrow x=15+4y$

Na levé straně obou rovnic je stejné číslo, z toho vyplývá, že i na pravé straně musí být stejné číslo (obě strany každé rovnice musí být stejné číslo) $\Rightarrow$ pravé strany se také rovnají.

$12+5y=15+4y$

$y=3$

x spočteme dosazením do jedné z rovnic.

$x=12+5y=12+5\cdot 3=27$ $\quad K=[27;3]$

Dodatek: Výraz shodný v obou rovnicích nemusí být nutně jedna z neznámých, může být i značně složitější. Aby bylo možné soustavu srovnávací metodou vyřešit, musí oba rozdílné výrazy na pravé straně obsahovat, pouze jednu stejnou proměnou. Jinak bychom jejich porovnáním získali rovnici o dvou neznámých (která obecně může mít nekonečně mnoho řešení).

Poznámka: Srovnávací metoda je hodně efektivní v některých situacích, ale není použitelná vždy.

Sčítací metoda

1. Rovnice vhodně vynásobíme.
2. Vynásobené rovnice sečteme (vynásobení musí být takové, aby se při sčítaní jedna z proměnných odečetla).
3. Spočítáme rovnici získanou rovnici s jedinou neznámou.
4. Pomocí spočtené neznámé určíme hodnotu druhé dosazením do jedné z původních rovnic.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x-5y=12 \\ x-4y=15 \end{matrix}$ sčítací metodou.

$x\text{-}5y=12$

$\underline{x-4y=15 \quad /\cdot(-1)}$

$x-5y=12$

$\underline{-x+4y=-15}$

Teď rovnice sečteme: K pravé straně první rovnice přičteme pravou stranu druhé (číslo –15), k levé straně první rovnice přičteme levou stranu druhé (výraz $(-x+4y)$).

Protože druhá rovnice je rovnicí, je hodnota obou jejich stran stejná $\Rightarrow$ k levé straně první rovnice tak připočítáváme také číslo –15, ale napsané složitěji.

$x+(-x)-5y+4y=12+(-15)$
$0\cdot x-y=-3$
$y=3$
Dosadíme do jedné z rovnic (například té první).
$x-5y=12\Rightarrow x-5\cdot 3=12\Rightarrow x=27$ $K=[27;3]$

Dodatek: Sčítací metoda není nic jiného než uplatnění ekvivalentní úpravy rovnice – přičtením stejného čísla k oběma stranám rovnice se její řešení nezmění. Číslo, které přičítáme, je však pokaždé jinak zapsané.

Poznámka: Sčítací metoda je při řešení soustav rovnic s více než dvěma rovnicemi zdaleka nejpoužívanější.

Na první pohled se zdá, že sečtením jsme ze dvou rovnic udělali jednu. **Není to pravda!** Sečtením jsme získali jednu rovnici, ale abychom určili i hodnotu druhé proměnné, museli jsme jako druhou použít jednu ze dvou původních rovnic. Správně jsme tedy měli stále sadu dvou rovnic, v níž jsme jednu z původních nahradili součtem obou rovnic. Správný striktní zápis totální sčítací metody by vypadal takto:

$$\begin{array}{l} x-5y=12 \\ \underline{x-4y=15} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-5y=12 \\ \underline{x-x-4y-(-5y)=15-12} \end{array}$$ (místo druhé rovnice píšeme rozdíl druhé rovnice a první rovnice)

$$\begin{array}{l} x-5y=12 \\ \underline{\quad y=3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-5y+5y=12+5\cdot 3 \\ \underline{\qquad\quad y=3} \end{array}$$ (k první rovnici přičítáme pětinásobek druhé)

$$\begin{array}{l} x=27 \\ \underline{y=3} \end{array}$$

Zápis je zdlouhavý, ale je z něj vidět, že jsme měli dvě podmínky pro neznámé a tyto podmínky jsme postupně zprůhledňovali tak, aby bylo co nejlépe vidět, jaké hodnoty neznámých připouštějí.
Při první úpravě jsme rovnice odečítali, mělo by se tedy jednat o odčítací metodu. Tento název se ale nepoužívá, odečítání bereme jako přičítání opačného čísla (viz. původní postup).

Pedagogická poznámka: Diskuse o zachovávání počtu rovnic je důležitá. Právě ztrácení rovnic a celkově malý přehled o tom, kolik rovnic soustava vlastně obsahuje, je zdrojem řady problémů u složitějších příkladů.

Existují i další metody.

Př. 5: Vyřeš libovolnou metodou soustavu rovnic $\begin{array}{l} xy-x=2 \\ xy^2-x=6 \end{array}$.

Upravíme soustavu:

$$x(y-1)=2$$
$$x(y^2-1)=6$$

$$x(y-1)=2$$
$$x(y-1)(y+1)=6 \qquad /:(y+1),\quad y\neq -1$$

$$x(y-1)=2$$
$$x(y-1)=\frac{6}{y+1}$$

Použijeme srovnávací metodu:

$$2=\frac{6}{y+1} \qquad /\cdot(y+1)$$
$$2(y+1)=6$$
$$2y+2=6$$
$$2y=4$$
$$y=2$$

Dosazením do první rovnice určíme *x*:

$$x(2-1)=2$$
$$x=2 \qquad\qquad K=[2;2]$$

Dodatek: Soustavu je možné řešit i dosazovací metodou, naopak sčítací metoda by šla uplatnit jen těžko.

Soustavu je možné vyřešit efektivněji pomocí nové metody.

Metoda dělicí

$$xy-x=2$$
$$xy^2-x=6$$

$$x(y-1)=2$$
$$x(y^2-1)=6$$

$$x(y-1)=2$$
$$\frac{x(y^2-1)}{x(y-1)}=\frac{6}{2}$$

Druhou rovnici jsme vydělili první rovnicí. Dělili jsme obě rovnice číslem 2, jednou ale bylo napsáno jako $x(y-1)$. Podmínky jsou zbytečné. Víme, že nedělíme nulou (dělíme číslem 2) .

$$x(y-1)=2$$
$$\frac{x(y-1)(y+1)}{x(y-1)}=\frac{6}{2}$$

$$x(y-1)=2$$
$$y+1=3$$

$$x(y-1)=2$$
$$y=2$$

(teď dosadíme hodnotu *y* do první rovnice)

$$x(2-1)=2$$
$$y=2$$

$$x=2$$
$$y=2$$

$$K=[2;2]$$

Podobně jako dělicí metodu můžeme odvodit i další metody, které vycházejí z ekvivalentních úprav a jejich hlavní myšlenky – pokud provedeme s oběma stranami rovnice takovou úpravu, která změní obě hodnoty stejně, řešení se nezmění.

Shrnutí: Pro řešení soustav dvou rovnic můžeme používat různé metody, které však vždy vycházejí z principu ekvivalentní úpravy rovnice.