

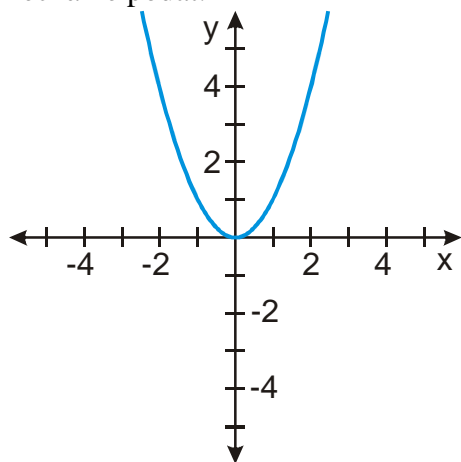
## 2.2.2 Důsledkové úpravy

**Předpoklady:** 2201

**Pedagogická poznámka:** Tato kapitola nevystačí na celou hodinu, tak maximálně na půl. Buď je možné ji probrat před písemkou nebo v rámci cvičení.

Při řešení rovnic s odmocninami se používá úprava „umocnit na druhou“. Jde o ekvivalentní úpravu?

Odpovídající funkcí je  $y = x^2$ . Záleží, jak vypadá její graf. Funkci zatím neznáme, takže se necháme podat.



Je zřejmé, že funkce  $y = x^2$  není prostá  $\Rightarrow$  úprava „umocnit na druhou“ není ekvivalentní.

Podíváme se zblízka proč:

$$\begin{array}{ll} 3 = 3 & 3 \neq -3 \\ (3)^2 = (3)^2 & (3)^2 = (-3)^2 \\ 9 = 9 & 9 = 9 \end{array}$$

**Z čísel, která se nerovnal, jsme získali stejná čísla. I přesto budeme umocňování používat (jinak to nejde).**

Jaké to bude mít důsledky?

Z nerovnjících se čísel jsme dostali čísla, která se rovnají  $\Rightarrow$  může se objevit něco, co se tváří jako výsledek, ale výsledek to není (z umocňování nerovnosti  $3 \neq -3$  je vidět, kde se takové falešné výsledky berou).

$\Rightarrow$  Budeme muset dělat zkoušku (vyzkoušet všechny „výsledky“, zda jsou pravé či falešné).

**Umocňování je důsledková úprava. Při použití důsledkové úpravy neztratíme žádné správné řešení, ale mohou se objevit klamná další řešení. Proto typicky provádíme zkoušku.**

**Př. 1:** Vyřeš rovnici:  $\sqrt{x+2} = x-4$ .

Musíme umocňovat:

$$\sqrt{x+2} = x-4 \quad /^2$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2$$

$$x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = \frac{9+5}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{9-5}{2} = 2$$

Zkontrolujeme, zda nějaké řešení není klamné:

$$x = 7$$

$$\sqrt{x+2} = x-4$$

$$\sqrt{7+2} = 7-4$$

$$3 = 3$$

Zkouška vyšla  $\Rightarrow x = 7$  je řešením rovnice.

$$x = 2$$

$$\sqrt{x+2} = x-4$$

$$\sqrt{2+2} = 2-4$$

$$2 = -2 \text{ - není pravda}$$

Zkouška nevyšla  $\Rightarrow x = 2$  není řešením rovnice (zároveň je vidět, že po umocnění rovnice by se její strany začaly rovnat).

Rovnice  $\sqrt{x+2} = x-4$  má jediné řešení  $x = 7$ . Píšeme  $K = \{7\}$ .

**Pedagogická poznámka:** Na první pohled vypadá předchozí příklad jako podraz. Studenti řeší rovnici s odmocninou, kterou ještě neprobírali. Zás takový podraz to není, většina studentů vyřeší rovnici i bez pomoci. Na příkladu se dají sledovat dvě věci. Jestli si studenti všímají „základních pravidel“. Při řešení rovnice v úvodu minulé hodiny je kladen důraz na to, že všechny úpravy se provádějí s číslem (s celou jednou stranou rovnice). Pokud se toho studenti drží, snadno se vyhnou vcelku běžné chybě „umocňování po částech“.

Tento příklad jako první po poměrně dlouhé době využívá vzorec na kvadratickou rovnici, který se studenti učí úplně na začátku a který já zařazuji mezi vědomosti, které si musejí pamatovat pořád (červený rámeček). Takže je upozorním, že vzorec se jim bude doopravdy hodit, a těm, co si ho nepamatují a nejsou schopni ho někde rychle vyhrabat, dám mínus.

**Shrnutí:** Při důsledkových úpravách (jako je umocňování) se mohou objevit falešné kořeny. Proto typicky provádíme zkoušku.