1.1.17 Rovnoměrně zrychlený pohyb v příkladech III

Předpoklady: 1116

Pedagogická poznámka: Hodinu dělím na dvě části: 15 minut na první dva příklady a zbytek na ostatní. I když všichni nestihnout spočítat druhý příklad je potřeba, aby se rozebrala smysluplnost obou výsledků.

Př. 1: Auto během zrychlování z počáteční rychlost 50 km/h se zrychlením $2\,\mathrm{m/s^2}$ urazilo dráhu 100 m. Jak dlouho auto zrychlovalo? Jaké rychlosti dosáhlo?

$v_0 = 50\,\mathrm{km/h} = 13,9\,\mathrm{m/s}$ $\quad s = 100\,\mathrm{m}$ $\quad a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad t = ?$ $\quad v = ?$

Auto se pohybuje s nenulovou počáteční rychlostí $\Rightarrow$ musíme použít kompletní sadu rovnic:

$v = v_0 + at$ — 2 neznámé veličiny v rovnici

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ — jedna neznámá veličina v rovnici $\Rightarrow$ můžeme ihned počítat čas

rovnice je pro čas kvadratická $\Rightarrow$ nepůjde vyjádřit, rovnou dosadíme a vypočteme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 100 = 13,9t + \frac{1}{2}2t^2$

$t^2 + 13,9t - 100 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13,9 \pm \sqrt{13,9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2 \cdot 1} = \frac{-13,9 \pm 24,3}{2}$$

$t_1 = \frac{-13,9 + 24,3}{2} = 5,2\,\mathrm{s}$ $\qquad t_2 = \frac{-13,9 - 24,3}{2} = -19,1\,\mathrm{s}$ - nemá smysl

Nyní můžeme dopočítat dosaženou rychlost:

$v = v_0 + at = 13,9 + 2 \cdot 5,2\,\mathrm{m/s} = 24,3\,\mathrm{m/s} = 87,5\,\mathrm{km/h}$

Auto zrychlovalo 5,2 a dosáhlo rychlosti 87,5 km/h.

Př. 2: Urči dobu, za kterou vystoupal do výšky 4 m kámen hozený kolmo vzhůru rychlostí 10 m/s. Kámen se pohyboval kvůli přitahování Země se zrychlením $10\,\mathrm{m/s^2}$.

$v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ $\quad s = 4\,\mathrm{m}$ $\quad a = -10\,\mathrm{m/s^2}$ (Země rychlost kamene zmenšuje) $\quad t = ?$

Kámen se pohybuje s nenulovou počáteční rychlostí $\Rightarrow$ musíme použít kompletní sadu rovnic:

$v = v_0 + at$ — 2 neznámé veličiny v rovnici, rychlost nás ani nezajímá

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ — jedna neznámá veličina v rovnici $\Rightarrow$ můžeme ihned počítat čas

rovnice je pro čas kvadratická $\Rightarrow$ nepůjde vyjádřit, rovnou dosadíme a vypočteme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 4 = 10t + \frac{1}{2}(-10)t^2$

$5t^2 - 10t + 4 = 0$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot5\cdot4}}{2\cdot5}=\frac{10\pm4,5}{10}$$

$t_1=\frac{10+4,5}{10}=1,5\,\text{s}$ $\quad\quad$ $t_2=\frac{10-4,5}{10}=0,6\,\text{s}$

Smysl mají oba kořeny, kámen dosáhne výšky 4 m během sloupání a poté ještě jednou až bude padat dolů.
Kámen vystoupá do výšky 4 m přibližně za 0,6 s, ve stejné výšce se pak objeví ještě během pádu 1,5 sekundy od vyhození.

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou z hlediska potřebných matematických dovedností asi nejobtížnějším okamžikem v celé středoškolské fyzice. Nejsem si jistý zda má vůbec cenu se jimi zabývat, cena ve formě znechucení studentů je možná příliš vysoká. Já osobně studentům říkám, že z hlediska úprav jde o nejtěžší věc, která rozhodně není ve fyzice nejdůležitější a i v případě, že zrovna těchto pár příklad nezvládnou není to žádná katastrofa. Pokud se jim naopak bude dařit mohou počítat s tím, že matematika by jim při fyzice neměla dělat problémy.

Pedagogická poznámka: Je potřeba studentům sdělit, že v žádném případě není cílem, aby si pamatovali vztahy, které v následujících příkladech pro jednotlivé veličiny získají. Jediné, co by si měli pamatovat, je soustava rovnic pro rovnoměrně zrchlený pohyb.

Př. 3: Auto během zrychlování z 90 km/h na 130 km/h ujelo dráhu 180 m. Jak dlouho zrychlovalo? Jaké bylo jeho zrychlení? Pro obě veličiny odvoď obecné vztahy.

$v_0=90\,\text{km/h}=25\,\text{m/s}$ $\quad v=130\,\text{km/h}=36,1\,\text{m/s}$ $\quad s=180\,\text{m}$ $\quad t=?$ $\quad a=?$

Počáteční rychlost není nulová $\Rightarrow$ musíme použít kompletní sadu rovnic a z jedné dosadit do druhé:

$$v=v_0+at \;\Rightarrow\; v-v_0=at \;\Rightarrow\; t=\frac{v-v_0}{a}$$

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$s=v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right)+\frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2=\frac{vv_0-v_0^2}{a}+\frac{1}{2}a\frac{v^2-2vv_0+v_0^2}{a^2}$$

$s=\frac{vv_0-v_0^2}{a}+\frac{v^2-2vv_0+v_0^2}{2a}$ $\quad$ vynásobíme rovnici výrazem $2a$

$$2as=2vv_0-2v_0^2+v^2-2vv_0+v_0^2$$

$$2as=v^2-v_0^2$$

$$a=\frac{v^2-v_0^2}{2s}$$

Čas *t* vypočteme obecně nejjednodušeji tak, že výraz pro *a* dosadíme do výrazu pro *t*.

$$t=\frac{v-v_0}{a}$$

$$t=\frac{v-v_0}{\frac{v^2-v_0^2}{2s}}=\frac{v-v_0}{\frac{(v-v_0)(v+v_0)}{2s}}=\frac{2s}{v+v_0}$$

Dosadíme a vypočteme hodnoty:

$$a=\frac{v^2-v_0^2}{2s}=\frac{36{,}1^2-25^2}{2\cdot 180}\,\mathrm{m/s^2}\doteq 1{,}9\,\mathrm{m/s^2}$$

$$t=\frac{2s}{v+v_0}=\frac{2\cdot 180}{36{,}1+25}\,\mathrm{s}\doteq 5{,}9\,\mathrm{s}$$

Auto zrychlovalo se zrychlením $1{,}9\,\mathrm{m/s^2}$ přibližně po dobu $6\,\mathrm{s}$.

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu si ukazujeme, že obecný výpočet nám v každém okamžiku umožňuje kontrolovat zda může být výpočet ještě správně.

Dodatek: Výhodou obecného řešení je samozřejmě také možnost provést rozměrovou zkoušku (dosazením jednotek):

$$a=\frac{v^2-v_0^2}{2s}\Rightarrow\frac{\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\mathrm{m}}=\frac{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$ $\Rightarrow$ výsledek může být správně.

Př. 4: Bruslař po rozjetí jel rovnoměrně zpomaleným pohybem 15 s než narazil rychlostí 1 m/s do svého kamaráda. Jaká byla jeho počáteční rychlost pokud rovnoměrně zpomaleným pohybem ujel 45 m?

$v=1\,\mathrm{m/s}$ $\quad s=45\,\mathrm{m}$ $\quad t=15$ $\quad v_0=?$

Počáteční rychlost není nulová $\Rightarrow$ musíme použít kompletní sadu rovnic. Nezajímá nás zrychlení $\Rightarrow$ vyjádříme ho z první rovnice a dosadíme do druhé:

$$v=v_0+at\ \Rightarrow\ v-v_0=at\ \Rightarrow\ a=\frac{v-v_0}{t}$$

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$s=v_0t+\frac{1}{2}\frac{v-v_0}{t}t^2=v_0t+\frac{1}{2}(v-v_0)t$$

$$2s=2v_0t+vt-v_0t$$

$$2s=v_0t+vt$$

$$2s-vt=v_0t$$

$$v_0=\frac{2s-vt}{t}=\frac{2s}{t}-v$$

$$v_0=\frac{2s}{t}-v=\frac{2\cdot 45}{15}-1\,\mathrm{m/s}=5\,\mathrm{m/s}$$

Bruslař se pohyboval počáteční rychlostí 5 m/s.

Př. 5: Pokud řidič sundá nohu z plynu, zpomalí automobil na rovině o 10 km/h během 4 sekund. Jak daleko před vesnicí musí na rovné silnici řidič sundat nohu z plynu, aby ušetřil palivo tím, že během samovolně zpomalování z 90 km/h přesně na 50 km/h auto nebude žádné palivo spotřebovávat?

$\Delta t = 4\,\mathrm{s}$ $\Delta v = 10\,\mathrm{km/h} = 2{,}78\,\mathrm{m/s}$ $v_0 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ $v = 50\,\mathrm{km/h} = 13{,}9\,\mathrm{m/s}$

$s = ?$

Auto se během dojíždění k vesnici pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem. Velikost zpomalení tohoto pohybu je zadaná (ale trochu skrytě). Počáteční i koncová rychlost jsou nenulové $\Rightarrow$ musíme použít kompletní soustavu rovnic. Čas nás nezajímá $\Rightarrow$ vyjádříme si ho z první rovnice a dosadíme do druhé:

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow\; v - v_0 = at \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$s = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{vv_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{vv_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{2vv_0 - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Dosazení:

Výpočet zrychlení: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2{,}78}{4}\,\mathrm{m/s^2} = -0{,}70\,\mathrm{m/s^2}$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{13{,}9^2 - 25^2}{2\cdot(-0{,}7)}\,\mathrm{m} = 308\,\mathrm{m}$$

Auto musí začít zpomalovat 308 m před vesnicí.

Př. 6: Strojvůdce nákladního vlaku jedoucího rychlostí 54 km/h spatřil při výjezdu ze zatáčky auto stojící na přejezdu. Přestože začal ihned brzdit, vlak do auta narazil přibližně rychlostí 36 km/h. Spočtěte zrychlení vlaku a dobu, kterou vlak brzdil, když výjezd ze zatáčky je od přejezdu vzdálen 125 m. Jak se změnilo zpomalení vlaku, když před sebou tlačil vrak automobilu ještě 25 m?

$v_1 = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$ $v_2 = 36\,\mathrm{km/h} = 10\,\mathrm{m/s}$ $v_3 = 0\,\mathrm{m/s}$ $s_1 = 125\,\mathrm{m}$ $s_2 = 25\,\mathrm{m}$

$a_1 = ?$ $t_1 = ?$ $a_2 = ?$

Popisovaný děj se skládá ze dvou rovnoměrně zpomalených pohybů. Nejdříve vlak zpomalil z rychlosti v_1 na rychlost v_2 na dráze 125 m. Potom rovnoměrně zpomalil z rychlosti v_2 na rychlost $v_3 = 0\,\mathrm{m/s}$ na dráze 25 m. Odvodíme vzorec pro výpočet zrychlení a použijeme jej pro obě části pohybu.

Z rovnice pro rychlost vyjádříme čas

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow\; \frac{v - v_0}{a} = t$$

Dosadíme do rovnice pro dráhu:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

$$s = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2 v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$2s = \frac{2 v_0 v - 2 v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2 v v_0 + v_0^2}{a}$$

$$2sa = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Dosazením výsledku do vztahu pro čas získáme vztah pro jeho určení.

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{\frac{v^2 - v_0^2}{2s}} = \frac{2s}{v + v_0}$$

Dosazení:

1. část pohybu, platí $v_0 = v_1$, $v = v_2$ a $s = s_1$.

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 s_1} = \frac{10^2 - 15^2}{2 \cdot 125} \, \mathrm{m/s^2} = -0,5 \, \mathrm{m/s^2}$$

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2 s_1}{v_2 + v_1} = \frac{2 \cdot 125}{10 + 15} \, \mathrm{s} = 10 \, \mathrm{s}$$

2. část pohybu, platí $v_0 = v_2$, $v = v_3 = 0 \, \mathrm{m/s}$ a $s = s_2$ ..

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2 s_2} = \frac{0^2 - 10^2}{2 \cdot 25} \, \mathrm{m/s^2} = -2 \, \mathrm{m/s^2}$$

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2 s_2}{v_3 + v_2} = \frac{2 \cdot 25}{0 + 10} \, \mathrm{s} = 5 \, \mathrm{s}$$

Vlak brzdil se zrychlením $-0,5 \, \mathrm{m/s^2}$ po dobu 10 s, po srážce se jeho zrychlení zvětšilo čtyřikrát na hodnotu $-2 \mathrm{m/s^2}$.

Poznámka: Ve skutečnosti se zpomalení vlaku zvětšilo méně, protože část z rychlosti 36 km/h, kterou měl, když narážel do auta, vlak ztratil při nárazu do auta tím, že ho uvedl do pohybu. Počáteční rychlost na počátku druhého zpomalování tak byla o něco menší.

Shrnutí: